Mappa per la Risoluzione del Problema di aritmetica o geometria (MRP): esperienza laboratoriale tra linguaggio naturale e formale

Map for Solving the Problem of arithmetic or geometry (MSP): workshop experience between natural and formal language

Tullio Aebischer
IC Orsa Maggiore Secondaria (Roma) - tullio.aebischer@posta.istruzione.it

Manuela Menna
IC Orsa Maggiore Primaria (Roma) - manuela.menna@posta.istruzione.it

ABSTRACT
The didactic planning according to the vision of the vertical Curriculum forced the Authors to ask themselves the question of how to make the transition from Primary to Secondary as continuous as possible in relation to problem solving in Mathematics. The analysis of the situation in the two areas led to the design and discussion with the students of a conceptual map that would allow them to guide this important aspect of translation from natural to formal language. The workshop experience, which began in 2017 and lasted until 2019, highlighted more nominal misunderstandings than real conceptual obstacles.

La progettazione didattica secondo la visione del Curricolo verticale ha costretto gli Autori a porsi la domanda di come rendere il più continuo possibile il passaggio dalla Primaria alla Secondaria relativamente al problem solving in Matematica. L'analisi della situazione nei due ambiti ha portato al disegno e alla discussione con gli alunni di una mappa concettuale che permettesse di guidare questo importante aspetto di traduzione dal linguaggio naturale a quello formale. L'esperienza laboratoriale, iniziata nel 2017 e protrattasi fino al 2019, ha evidenziato più incomprensioni nominali che reali ostacoli concettuali.

KEYWORDS
School, Mathematics, Problem solving, Conceptual map, Metacognitive strategies
Scuola, Matematica, Problem solving, Mappa concettuale, Strategie metacognitive

* Attribuzione delle parti. L'articolo è il frutto di un lavoro condiviso tra gli Autori. Nello specifico, essi hanno contribuito alla stesura dei seguenti paragrafi: T. Aebischer Introduzione, 1, 2, 3, 4 e Conclusioni; M. Menna 1 e Conclusioni.

Formazione & Insegnamento XVIII – 3 – 2020
Codice ISSN 2279-7505 (on line) © Pensa MultiMedia Editore
Codice doi: 10.7346/-fei-XVIII-03-20_16

Introduzione

La scelta di lavorare sul metodo di risoluzione dei problemi di aritmetica o geometria si basa sia su un interesse professionale e sull'esperienza degli Autori sia su quanto riportato nelle *Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari* del MIUR (oggi Ministero dell'Istruzione) pubblicate nel 2018. Per quanto riguarda il pensiero computazionale nelle *Indicazioni* si legge come per esso debba intendersi quel processo mentale che consente di risolvere problemi di varia natura seguendo metodi e strumenti specifici pianificando una strategia (MIUR 2018, p. 13). Il problem solving è un processo logico creativo (euristico) che, più o meno consapevolmente, viene messo in atto nella vita quotidiana per affrontare e risolvere problemi dal più semplice al più complesso (Kahneman 2015, p. 14). L'educazione ad agire consapevolmente con tale strategia consente di apprendere ad affrontare le situazioni in modo analitico, scomponendole nei vari aspetti che le caratterizzano e pianificando le soluzioni più idonee. Se, purtroppo, l'immaginario collettivo vede nell'approccio matematico e nel problem solving, in particolare, un ostacolo diverso, e quasi insormontabile per molti (Tall 2016, pp. 3-28), da quello delle altre discipline, la proposta di una mappa che aiuti alla risoluzione diventa non solo desiderabile ma addirittura quasi imprescindibile.

La mappa suggerita permette al docente di trasferire agli alunni anche delle nozioni metacognitive in maniera subliminale visto che un discorso diretto su questi concetti incontrerebbe delle giuste incomprensioni. Comunque, questa mappa non deve dare false sicurezze, ossia è utile solo quando la si sappia capire e utilizzare nel corretto modo aiutando l'alunno nell'ideazione della soluzione; non è una macchinetta nella quale inserire i dati e girare la manovella per avere la soluzione.

1. L'esperienza laboratoriale

Il lavoro che si presenterà fu iniziato nell'ottobre 2016 con una visione da curricolo verticale della didattica della Matematica tra Primaria e Secondaria. Tale visione, oltre che dettata dal PTOF (Piano Triennale dell'Offerta Formativa) dell'Istituto, aveva lo scopo di eliminare le incomprensioni (poi quasi del tutto infondate) degli alunni nel passaggio tra i due percorsi del Primo Ciclo d'istruzione (da Primaria a Secondaria di I Grado) che credevano il metodo di risoluzione dei problemi completamente diverso: in molti casi la differenza è in gran parte di nomenclatura tolti, ovviamente, gli aspetti tecnici che progredivano.

Il lavoro con gli alunni della Primaria è stato lento poiché è difficile lavorare in astratto per cui si é reso necessario visualizzare la situazione e quindi lavorare in concreto. In particolare, nella prima fase del lavoro si è cercato di dare spazio alla comprensione del testo con sottolineature poiché molto spesso gli alunni vedono il problema come un esercizio dove è sufficiente trovare i numeri e metterli insieme. Per tale motivo si è cercato di far convergere l'attenzione sul significato delle parole e sulle loro relazioni matematiche. Tale attività aveva lo scopo di guidarli a un ragionamento scritto. Il passo successivo è stato di tradurre quanto scritto sotto forma di testo in percorsi numerici: inizialmente piccole frasi, poi parole e infine il simbolo letterale (Figura 1).

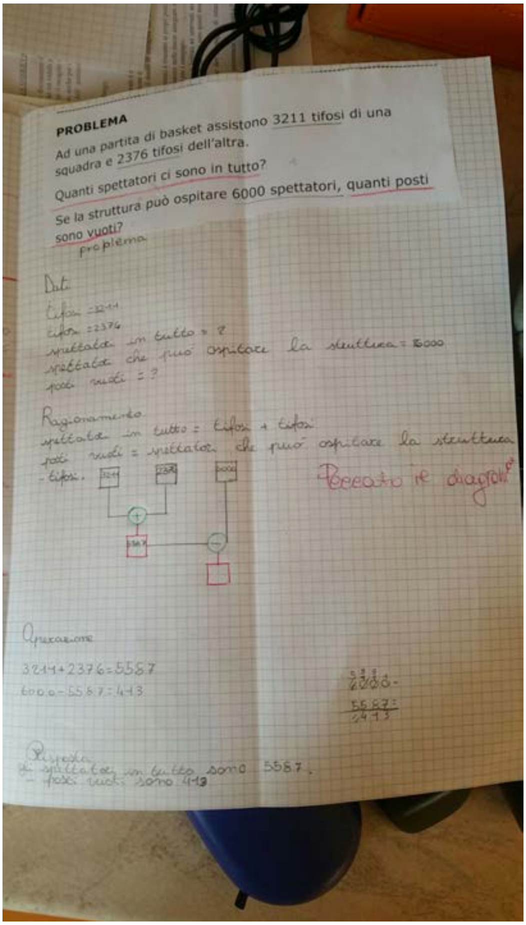

Figura 1. Svolgimento di un problema nella Primaria (2018) (©MM)

La discussione sulla MRP nella Secondaria è stata iniziata dalla prima classe evidenziando subito e in maniera paradossale la sua inutilità a causa del suo eccessivo formalismo a fronte di problemi semplici. L'osservazione critica ha un suo fondamento ma nell'ottica di una didattica che lavori nell'arco di tre anni e che miri all'apprendimento di nuove metodologie metacognitive, l'iniziare quanto prima permette all'alunno di avere due metodi di risoluzione per un confronto: un conosciuto dalla Primaria e l'altro in fase di apprendimento nella Secondaria. A mano a mano che i problemi diverranno più complessi e la metodologia della Primaria si rivelerà inadeguata a gestire una maggiore e più complessa mole di dati e di operazioni, la MRP appresa sarà un nuovo metodo ma collaudato e, quindi, di sicuro impiego, specialmente nelle verifiche scritte in classe dove non viene comunicata la soluzione come per i compiti a casa. Per superare tale difficoltà agli alunni della classe prima della Secondaria di I Grado, dopo l'introduzione della MRP, si è chiesto di scegliere alcuni problemi svolti nell'ultima classe della Primaria e di risolverli col nuovo metodo per permettere loro di avere già una linea guida per focalizzare l'attenzione sugli aspetti formali e apprezzare l'utilità del metodo euristico offerto dalla MRP.

2. Il problem solving

Nel problem solving non sempre è messo in evidenza un aspetto che si ritiene fondamentale nel migliorare il rapporto persona-realtà: l'errore. L'errore a scuola è visto sempre come la dannazione assoluta, un qualcosa da evitare a tutti i costi. Al contrario, l'errore, diciamo, ragionato è un'importante base di discussione. Infatti, l'analisi del ragionamento fallace permette di verificare le proprie conoscenze e capacità di collegamento per un continuo miglioramento. Il compito del docente è proprio quello di sfruttare al massimo questo momento per far scomparire l'ansia dello sbaglio e comprendere il processo metacognitivo dell'alunno. L'alunno che non argomenta è una black box che non aiuta nessuno, specie a scuola dove l'obiettivo principale è allenarsi alla vita con la possibilità di sbagliare. Tale approccio euristico può benissimo essere applicato anche ad altre discipline come l'analisi logica di un testo. A corroborare quanto detto, si riporta il pensiero del matematico tedesco Hilbert in merito ai problemi (Hilbert 1900, p. 254):

> Un problema matematico deve essere difficile, perché così ci stimola, ma non inaccessibile, altrimenti si farà beffe dei nostri sforzi; deve essere un punto di riferimento che ci serva da guida nei sentieri tortuosi verso le verità nascoste, e poi ci premi con la gioia (*Freude*) che segue la scoperta della soluzione.

Con l'obiettivo di un continuo miglioramento, tutte le tecniche per gestire metacognitivamente e formalmente il problem solving possono rivelarsi utili al processo didattico-formativo.

3. Il disegno della MRP

L'idea di stilare una mappa relativa alla soluzione dei problemi si rifà al classico testo di Polya (Polya 1945; UMI-CIIM 2016, p. 23) nel quale si riportano le quattro fasi per svolgere la risoluzione del problema:

a. comprendere il problema;
b. comprendere come i dati si collegano ai quesiti del problema;
c. scrivere il piano di risoluzione del problema;
d. rivedere i passi svolti, eventualmente correggerli.

I suddetti quattro punti sono volutamente generici proprio per avere un metodo il più generale possibile. Infatti, Polya affrontava la risoluzione dei problemi con tecniche euristiche, ossia metodiche che permettevano la scoperta della soluzione che non fosse un semplice algoritmo con un definito input e un conseguente output. Per tale motivo la MRP deve servire come guida alla soluzione dei problemi (Jitendra, Hoff, Beck 2002, p. 10). La difficoltà nel costruire la soluzione è nel saper trovare il percorso giusto applicando al problema quanto prescritto nei vari passi. Ma anche i passi hanno la necessità di un lavorio da parte dell'alunno che permetta, in definitiva, non solo la cosiddetta matematizzazione del testo del problema ma anche la sua leggibilità per l'analisi critica.

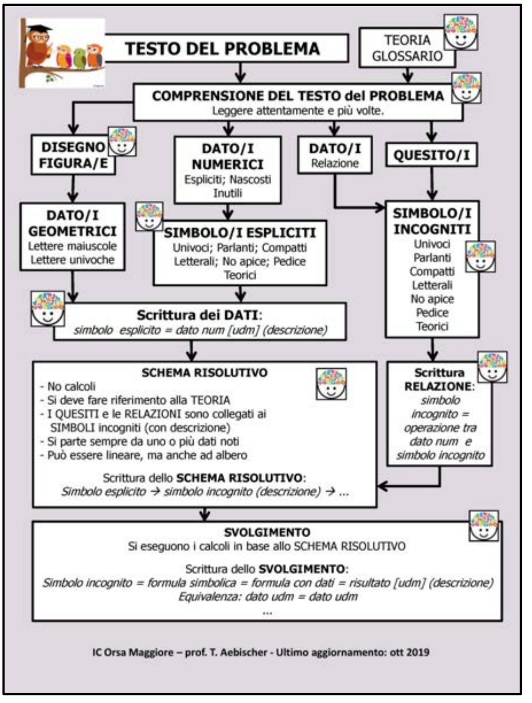

Figura 2. La MRP aggiornata all'ottobre 2019 (©TA)

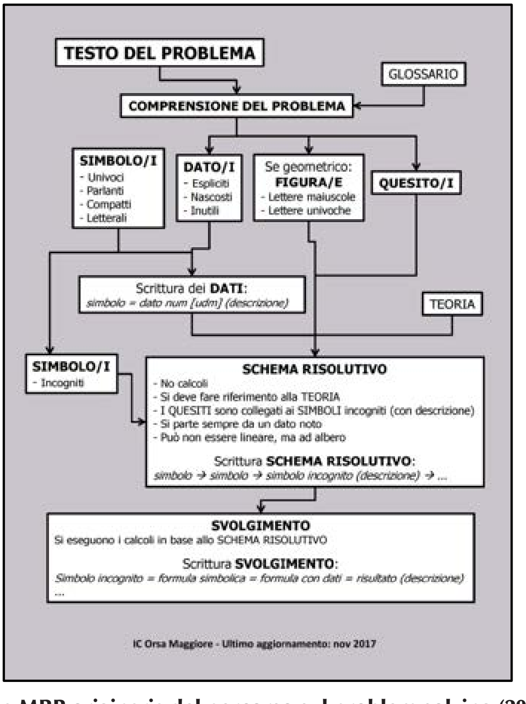

Figura 3. La MRP originaria del percorso sul problem solving (2017) (©TA)

La MRP sulla quale si ragionerà nel presente lavoro (Figura 2) è lo sviluppo di quella del 2017 (Figura 3) che per ragioni di spazio non si descriverà. L'unica considerazione che si desidera dare sulla MRP del 2017 è che fu disegnata in maniera volutamente approssimata per essere una specie di sasso nello stagno della classe al fine di sollecitare al massimo la discussione e non far calare dall'alto uno schema già quasi perfetto senza che gli alunni lo sentissero loro, che ne fossero, anche se in parte, artefici.

Nella MRP le attività che devono svolgere gli alunni sono state evidenziate con una *testolina matematica*, mentre le caselle senza testolina devono essere dedotte dal testo del problema.

La necessità di dare agli alunni la MRP su un supporto agile (foglio A4 ossia quasi protocollo come i quaderni che adottano) ha richiesto un disegno compatto delle varie parti. Comunque, la differenziazione nell'aspetto grafico la rende leggibile.

4. La struttura della MRP

A grandi linee, la risoluzione di un problema si può dividere in due macrofasi: la prima la traduzione dal linguaggio naturale a quello formale (Demartini, Sbaragli 2019), la seconda la corretta scrittura del linguaggio formale tradotto per eseguire i calcoli. La MRP ha il compito di agevolare al massimo l'esecuzione della seconda fase.

4.1 *I dati*

Il problema deve essere letto attentamente per identificare quelle parole e/o parti del discorso che sono importanti per comprendere ciò che dà per la risoluzione (i dati) e ciò che il problema chiede (i quesiti). Le parole chiave si riferiscono alla disciplina e si comprendono coll'apprendere la teoria (definizioni, formule, proprietà, …) dell'argomento del problema. Inoltre, è importante conoscere il significato matematico delle locuzioni che nel linguaggio naturale parafrasano concetti aritmetici: p. es. *Il doppio di* = moltiplicato per 2 o *un quarto di* = diviso per 4, ecc.. Sulla comprensione del testo di un problema vi è una vasta letteratura (Lorenzetti 2019; Zan 2016) e sicuramente potrà essere argomento di un'Unità Didattica interdisciplinare con Italiano. Ma in relazione proprio a uno degli scopi della MRP si vuole evidenziare un paradosso (metacognitivo) che il docente deve avere sempre in mente e che deve risolvere a ogni lezione (D'Amore, 2000, p. 34). Essendo l'insegnamento la comunicazione di ciò che deve essere appreso, il linguaggio utilizzato non deve essere fonte di ostacoli per cui tutta la comunicazione deve avvenire nella lingua naturale. Ma avendo la Matematica un suo linguaggio specifico, formale, uno dei principali obiettivi, se non il primo, di chi la insegna è quello di far apprendere agli allievi il significato di quel linguaggio specialistico. In definitiva, il paradosso si risolve veicolando con il linguaggio comune quello specialistico con proprio l'imposizione a usarlo senza parafrasarlo.

In un problema di geometria vi sarà sempre la necessità di disegnare la figura piana o del solido poiché è un dato del problema. Per disegnare le figure e i solidi bisogna esercitarsi perché esse devono essere chiare e leggibili poiché aiutano a comprendere e risolvere il problema. Per identificare le varie parti della figura (vertici, punti medi, ecc.) bisogna chiamarle in maniera univoca, ossia in tutto il problema quel nome indicherà solo quella parte senza far insorgere confusione. Nello scegliere le lettere si consiglia di non usare quelle che comunemente indicano il perimetro (*P*), l'area (*A*), il piede dell'altezza (*H*), ecc. Il disegno della figura non deve essere in scala 1:1, ossia non deve essere disegnato secondo le misure indicate e/o calcolate nel problema poiché deve dare solo un'idea di massima di quanto viene chiesto pur dovendo essere proporzionato: se un lato misura una lunghezza maggiore di un altro, il mio disegno lo deve evidenziare.

Anche in un problema di aritmetica è possibile disegnare delle figure per rappresentare i dati o il quesito (p. es. segmenti). In questo modo i dati aritmetici assumono una loro visibilità.

In genere nel testo del problema sono esplicitati dei valori numerici definiti come dati numerici. In altri casi il testo non dà esplicitamente il dato ma seguendo la teoria è possibile risalirvi: p. es. *Sia dato un quadrato*. Solo questa informazione mi dice che il perimetro è formato da 4 lati tra loro congruenti. Poiché tutto questo il testo non lo dice, questo tipo di dati si chiamano nascosti.

Una volta individuato il dato che il problema mi comunica, si rende necessario assegnargli un nome. Nelle formule non è possibile usare parole o descrizioni più o meno lunghe (tipico utilizzo nella Primaria) per cui è necessario usarne di più corte, compatte che chiameremo simbolo e le cui caratteristiche devono essere:

a. univocità, ossia deve significare una sola cosa in tutto il problema;
b. compattezza per essere maneggevole nelle formule senza farle diventare troppo grandi e, quindi, illeggibili e incontrollabili;
c. letterale in maniera che possa richiamarne il significato: p. es. *A* per area, *P* per perimetro;
d. non deve avere apici, ossia numeri piccoli scritti in alto a destra, perché questi potrebbero essere confusi con un esponente.

Per diversificare lo stesso simbolo tra diverse figure, p. es. *A* per l'area, si può scrivere in basso a destra (pedice) un numero o una lettera: A_K e A_W.

In alcuni casi si devono usare simboli definiti dalla comunità scientifica come il pi greco (π) o la costante di gravitazione universale (G): questi sono detti simboli teorici.

L'attenzione alla scrittura dei simboli e a una buona grafia (disegno e/o testo) delle formule è andata aumentando negli ultimi anni con la constatazione dell'aumento di alunni disgrafici (certificati o meno). La chiarezza grafica, oltre a una carenza di disposizione spaziale nel foglio del quaderno, si ritorce verso l'alunno perché varie volte egli afferma senza esitazioni di non capire cosa abbia scritto e da parte del docente sovente si richiede l'intuizione per comprendere cosa voleva dire l'alunno.

Il dato di relazione non è facile da individuare perché può essere espresso nel testo nel problema a parole: p. es. *la distanza tra casa e scuola è il triplo di quella tra casa e il cinema*. La parola chiave in quanto detto è *triplo*, ossia *moltiplicato per 3* in linguaggio matematico. Se ci fosse stato scritto *un terzo* avrebbe significato 3 volte più piccolo, ossia una divisione. In altri casi il testo può essere più esplicito come quando dà una frazione o una percentuale. Nel considerare la relazione bisogna porre attenzione al fatto che essa collega due dati che non si conoscono: p. es. so solo che è il doppio ma non so il doppio di cosa. Sarà lo svolgimento del problema che mi permetterà di calcolare il dato con i valori numerici. Pertanto, questo tipo di dato viene esplicitato dal testo del problema ma prende in considerazione dati incogniti.

Per inciso, la possibilità di redigere insieme agli alunni un dizionario che permetta la traduzione del linguaggio naturale in quello formale matematico potrebbe rivelarsi un valido aiuto anche dal punto di vista psicologico oltre che un'interessante esperienza interdisciplinare.

Il quesito è la richiesta (domanda) che il problema ci pone e che noi dobbiamo calcolare per rispondere. Anche l'incognita collegata al quesito dovrà avere un nome e quindi bisognerà dargli un simbolo scegliendolo come nel caso dei dati espliciti o nascosti.

4.2 *La scrittura dei dati*

Una volta identificati i dati e scelto i simboli con i quali rappresentarli durante lo svolgimento del problema, dobbiamo scriverli in maniera chiara. Il modo per scrivere i dati inizia con il relativo simbolo esplicito uguagliandolo al valore numerico, eventualmente seguito dall'unità di misura. Per ricordare di quale dato esplicito o nascosto sto parlando posso scriverne la descrizione in parentesi a destra dell'unità di misura.

Arrivati a questo punto bisogna evidenziare un dato di fatto: una volta scritti i dati e disegnata l'eventuale figura, il testo del problema 'non esiste più'. L'eventuale lavoro di verifica dei dati dal problema risulta poco usuale per cui bisogna far porre la massima attenzione dell'alunno a questa prima traduzione del testo in linguaggio matematico.

4.3 *Lo Schema risolutivo*

Prima di iniziare a svolgere i calcoli, è necessario avere un piano (lo Schema risolutivo; alla Primaria la Scaletta) per svolgere il problema. Questo piano serve per non dimenticare nulla e per svolgere i calcoli nell'ordine giusto. Inoltre, è utile per controllare in ogni momento se i calcoli hanno un senso e mi deve dire quali dati mi servono per calcolare il dato incognito successivo. Le sue caratteristiche sono:

a. deve partire sempre da uno o più dati noti;
b. per sapere cosa fare prima e cosa dopo è necessario conoscere la teoria;
c. un simbolo e il successivo sono collegati da una freccia che ne indicherà anche la sequenza di svolgimento. Ovviamente, un simbolo incognito che viene calcolato non è più tale per cui si può passare al successivo;
d. i simboli incogniti si devono far seguire dalla descrizione tra parentesi per collegarli al testo del problema e/o per un aiuto mnemonico;
e. non devono esserci i calcoli (questi si svolgeranno successivamente);
f. può essere una sequenza lineare o ramificato. Nel secondo caso due rami potranno essere svolti indipendentemente e se un errore si commetterà in uno, questo non intaccherà l'altro.

Nel disegnare lo Schema risolutivo può accadere che per calcolare il simbolo incognito relativo al quesito del problema (ultimo simbolo di un ramo!), si debbano calcolare prima altri simboli incogniti non indicati dal testo come quesiti precedenti necessari (quesiti a catena) (Figura 4).

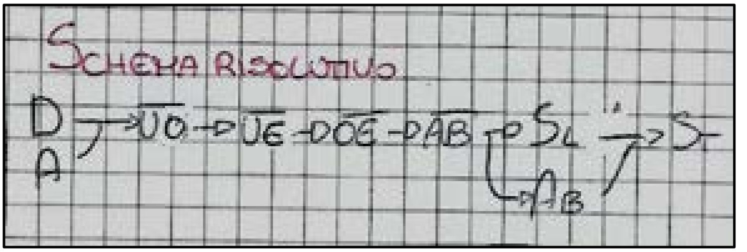

Figura 4. Esempio di uno Schema risolutivo (classe 3B Secondaria, 2020). (©TA)

Il disegno dello Schema risolutivo ha una chiara analogia con il coding per cui tale punto permette un altro collegamento interdisciplinare con Tecnologia oltre a verificare le capacità di un approccio analitico dei processi.

4.4 *Lo svolgimento*

Alla fine si devono svolgere i calcoli e questi devono seguire l'iter indicato dallo Schema risolutivo scrivendoli in maniera chiara e che permetta di controllare cosa si stia facendo per fermarsi appena si veda un errore. Una scrittura chiara offrirà al docente una documentazione non ambigua del processo elaborativo dell'alunno e gli permetterà di evidenziare con precisione le difficoltà incontrate per un puntuale recupero.

In questa fase la scrittura dei calcoli inizia sempre con un simbolo incognito seguito dalla formula simbolica che riporta solo i simboli dei dati che si devono utilizzare. Questo tipo di formula permette di comprendere esplicitamente se il calcolo viene eseguito con i dati giusti offrendo al docente l'importante indicazione se vi siano difficoltà a livello di studio teorico. La scrittura prosegue con la stessa formula simbolica nella quale si sostituiscono i valori numerici. La scrittura termina coi calcoli numerici per giungere al risultato seguito, eventualmente, dall'unità di misura. Se si vuole si può aggiungere una descrizione tra parentesi.

Nel caso che si debba eseguire un'equivalenza tra unità di misura diverse, la si deve scrivere col dato numerico seguito sempre dall'unità di misura.

Nelle Figure 5 e 6 si riportano le risoluzioni di problemi di geometria con la MRP nella prima e terza classe della Secondaria I Grado.

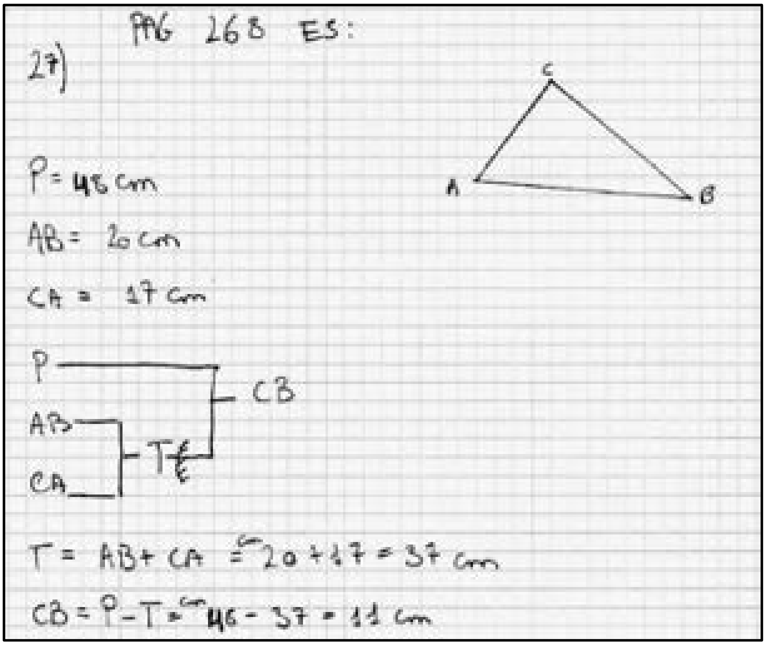

Figura 5. Esempio di problema risolto con la MRP (classe 1E Secondaria, 2020). Si noti lo Schema risolutivo e la sua traduzione nelle sottostanti formule. (©TA)

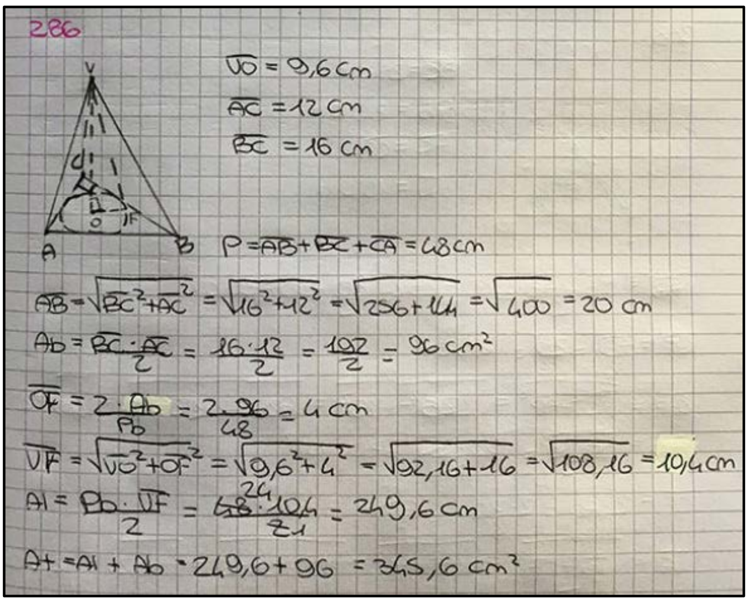

Figura 6. Esempio dello svolgimento di un problema con la MRP (classe 3B Secondaria, 2020). (©TA)

Conclusioni

Le finalità per le quali la MRP è stata disegnata e didatticamente presentata si possono così riassumere:

a. materializzare le indicazioni del libro di Polya avendone apprezzato le finalità sia operative che didattico-formative;
b. avere uno strumento operativo sul quale testare le difficoltà del passaggio tra la Primaria e la Secondaria di I grado anche in riferimento alle capacità metacognitive degli alunni (grado di astrazione);
c. acquisire un metodo, ossia avere l'occasione di saper adattare una procedura generale a vari casi particolari;
d. avere un linguaggio il più possibile chiaro nel tracciare il percorso logico-computazionale che si è seguito. Questo percorso, scritto in linguaggio autoesplicativo, permette all'alunno di verificare la sua soluzione e al docente di comprendere il suddetto percorso che molto spesso trova difficoltà a essere espresso verbalmente.

Non sembra inopportuno evidenziare come l'apparente rigidità della Mappa permetta invece all'alunno di poter dare il suo apporto inventivo nello scegliere i simboli più appropriati e la procedura risolutiva che meglio lo soddisfi.

Nel proporre la MRP l'esperienza ha evidenziato che la parte che rappresenta le maggiori difficoltà in molti alunni è lo Schema risolutivo. Sicuramente è il punto in cui l'astrazione analitica raggiunge il suo massimo con l'aggiunta della difficoltà di effettuare una pianificazione non dei calcoli ma delle azioni da eseguire in una prefissata sequenza. Il lavoro ciclico tra testo, deduzioni, ipotesi, errori per giungere alla soluzione giustifica l'utilità della MRP proprio per il suo carattere euristico (non algoritmico) che incanala le conoscenze, le abilità e le competenze dell'alunno nel disegno dello Schema risolutivo, vero e proprio cuore della soluzione, evidenziandone il processo metacognitivo.

Per quanto riguarda l'aspetto didattico tra Primaria e Secondaria, in via generale la struttura di risoluzione del problema è molto più simile di quanto gli stessi alunni pensassero. È, invece, l'aspetto formale che subisce un salto qualitativo dovendosi nella Secondaria riportare più informazioni di tipo astratto.

In definitiva, il problem solving, lo sviluppo di una mentalità computazionale e la MRP si pongono perfettamente nel solco della competenza chiave europea della *Competenza Matematica* definita come (MIUR, 2012, p. 14):

> ... l'abilità a sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico-matematiche, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, schemi, grafici, rappresentazioni).

In conclusione, pur ritenendo di aver raggiunto, come si direbbe in ambito informatico, una versione stabile della MRP, si ritiene la stessa sempre migliorabile avendo presente, come un monito, che una formula si impara a memoria e si applica, un metodo, una volta compreso e fatto proprio con un continuo lavorio personale oltre che guidato dal docente, si rivelerà un potente e generale strumento risolutivo.

Riferimenti bibliografici

D'Amore, B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 28-47, www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/355 lingua matematica didattica.pdf (visionato 17 ottobre 2020)

Demartini, S., Sbaragli, S. (2019). La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo. *Didattica della Matematica*, 5, 9-43, www.rivistaddm.ch/wp-content/uploads/volume-05/2019_05_Demartini_Sbaragli.pdf (visionato 17 ottobre 2020)

Hilbert, D. (1900). Matematische probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris. Göttingen, www.deutschestextarchiv.de/hilbert_mathematische_1900 (visionato 17 ottobre 2020)

Jitendra, A.K., Hoff, K., Beck M.M. (2002). L'uso degli schemi visivi per la risoluzione dei problemi matematici. *Difficoltà di apprendimento*, 8, 1, 9-20, www.studioinmappa.it/attachments/118_l_inseg._della_matematica.pdf (visionato 17 ottobre 2020)

Kahneman, D. (2015). *Pensieri lenti e veloci*. Milano

Lorenzetti, C. (2019). *(In)comprensione di problemi. Attività di cooperative learning promuovono comprensione e emozioni positive di fronte ai problemi matematici*, SUPSI Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana, Master of Arts in Insegnamento Livello Secondario 1 Disciplina Matematica, https://tesi.supsi.ch/2728/ (visionato 17 ottobre 2020)

MIUR (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione*, numero speciale, https://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf (visionato 17 ottobre 2020)

MIUR (2018). *Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari*, www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni-nazionali-e-nuovi-scenari.pdf (visionato 17 ottobre 2020)

Polya, G. (1945). *How to solve it. Princeton*, https://math.hawaii.edu/home/pdf/putnam/PolyaHowToSolveIt.pdf (visionato 17 ottobre 2020)

Tall, D. (2016). *Imparare a pensare matematicamente. Esplorando i tre mondi della matematica*. Roma

UMI-CIIM (2016). *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*. Novara

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Roma