



Riflessioni sulla natura socio-costruttiva della matematica: implicazioni pedagogico-didattiche

Reflections on the Socio-Constructive Nature of Mathematics: Pedagogical-didactic implications

Demetrio Ria

Università del Salento

demetrio.ria@unisalento.it

ABSTRACT

Mathematical education involves a wide range of objects, actions, tools, and disciplines, but built in a socio-pedagogical context. In these pages we intend to sketch the hypothesis that any productive dialogue between theory and practice that one wants to support in the specific field of mathematical education must be in the dialectic between the concrete context and contextual abstraction. We believe that the context must play a key role, since it has to link different perspectives, based on various professional activities, and offers the creation of referential connections with significant meanings and aspects, albeit comparable. This sense the requirement that the teacher must have is to be always ready to explore the conceivable relationships between the complexity of an exemplary concrete situation and its destination. New knowledge cannot simply be “donated” to students, which makes it severely inactive. The teacher must be aware of the way students are trying to reconstruct the meaning of the signs and the actions he has presented, to encourage generative and activation processes. This is not just about a plan of psychological process, but as activation agitated in a socio-cultural horizon.

L'educazione matematica coinvolge una vasta gamma di oggetti, azioni, attività e strumenti propri della disciplina, ma costruiti in un contesto socio-pedagogico. In queste pagine si intende abbozzare l'ipotesi che ogni dialogo produttivo tra teoria e pratica che si voglia sostenere nell'ambito specifico dell'educazione matematica deve svolgersi nella dialettica tra il contesto concreto e l'astrazione contestualizzata. Riteniamo che il contesto deve svolgere un ruolo fondamentale, perché deve collegare diversi punti di vista, che si basano su diverse attività professionali, e offre la creazione di connessioni referenziali con significati e aspetti particolari ancorché comparabili. Il questo senso il requisito che l'insegnante deve poter avere è quello di essere sempre pronto ad esplorare i rapporti concepibili tra la complessità di una situazione concreta esemplare e la sua destinazione. La nuova conoscenza non può essere semplicemente “donata” agli studenti, ciò la rende gravemente inattivabile. L'insegnante, per favorire i processi di generatività e di attivazione deve essere a conoscenza del modo in cui gli studenti stanno cercando di ricostruire il significato dei segni e delle operazioni che egli ha presentato. Ciò non soltanto su un piano di processualità psicologica, bensì come attivazione agita in un orizzonte socio-culturale.

KEYWORDS

Didactics of Mathematics, Mathematical Education, Epistemological Obstacle, Theory and Mathematical Practice, Socio-Constructivism.
Didattica della Matematica, Educazione Matematica, Ostacolo Epistemologico, Teoria e Pratica Matematica, Socio-Costruttivismo.

Premessa

La conoscenza non è un processo cumulativo. Le verità si trovano in una vera e propria “conversione” intellettuale che avviene riflettendo su un passato di errori. Infatti, come sostiene Bachelard, si sa sempre “contro” qualche conoscenza precedente, distruggendo quella mal costruita, superando quella che, nella mente stessa, è un ostacolo alla “spiritualizzazione”. (Bachelard, 1983, p. 14) In tal modo, una nuova comprensione può solo in parte essere costruita sui modi in precedenza sviluppati. Perché i processi di comprensione devono essere di una tale natura drammatica? Perché pensiamo che si possa raggiungere una buona comprensione del “mondo” se si riesce a superarne gli ostacoli? Le ragioni si trovano nelle nostre ipotesi riguardanti sia lo sviluppo intellettuale di un individuo, sia quello storico del sapere. La prima ipotesi è che passando da un livello di conoscenza e comprensione a un altro, vi è contemporaneamente la necessità d’integrazione e riorganizzazione. Quindi, per esempio, a scuola, quando si passa dall’aritmetica all’algebra, dobbiamo lasciare spazio al *repentance*-intellettuale, alla riorganizzazione del precedente.

Gli ostacoli epistemologici sono spesso legati alle illusioni positivistiche della possibilità di costruire conoscenze scientifiche sulla base della sola osservazione e della logica in un modo che è completamente libero da ogni considerazione “metafisica”. Infatti, la nozione di ostacolo epistemologico è nata dalla polemica di Bachelard contro il neopositivismo o empirismo logico. Non possiamo fare a meno della “metafisica” nella comprensione scientifica e questo significa che gli ostacoli epistemologici sono inevitabili. Le nostre convinzioni sulla natura della conoscenza scientifica, le visioni del mondo, le immagini mentali che sono impresse nella lingua che usiamo, gli schemi di pensiero, tutto questo costituisce la base di partenza per il nostro approccio ai problemi scientifici. D’altra parte i pregiudizi ci legano ai nostri approcci e alle soluzioni. Sono gli oggetti di scena necessari, e contestualmente gli ostacoli a una “buona comprensione”. Il loro superamento richiede una ricostruzione delle intese fondamentali.

Le principali innovazioni in matematica sono spesso accompagnate da discussioni, all’interno della comunità, su ciò che quel risultato implica. Si aprono questioni su come quell’innovazione incide sulla conoscenza matematica in generale, se compromette in qualche maniera la “certezza” della conoscenza raggiunta, o se influisca su i metodi di prova, ecc. Questo è quanto è accaduto, ad esempio, con i teoremi di Gödel, il problema dei quattro colori, o l’ultimo teorema di Fermat.

Heidegger (1962) sostiene che il movimento reale delle scienze avviene quando i loro concetti fondamentali subiscono una revisione più o meno radicale, che è trasparente a se stessa. Il livello che una scienza ha raggiunto è determinato da quanto è capace di una crisi nei suoi concetti di base. La matematica, che è apparentemente il più rigoroso e più saldamente strutturato campo delle scienze, ha raggiunto una crisi che ha minato le sue fondamenta. È così che si scopre che la sua struttura epistemologica poggia su palafitte, come altre forme del sapere, e soprattutto che questa incide sui processi di costruzione del suo sapere e sui processi che vengono messi in atto per trasferire il prodotto della ricerca stessa (didattica).

1. La nozione di ostacolo epistemologico come categoria di pensiero in Didattica della Matematica

La nozione di ostacolo epistemologico approdò nel dibattito sulla didattica della matematica intorno al 1976 e ben presto cominciò a essere utilizzato come una “categoria”. Vale a dire che è stata considerata come una nozione che, anche se non necessaria allo sviluppo del dominio scientifico, era sufficientemente generale e potente per dirigere il pensiero. Infatti, si considerava che il pensiero umano tendesse naturalmente a organizzare i suoi problemi intorno a certe nozioni. Le categorie appunto, che non sempre sono le caratteristiche del nostro intelletto e hanno un carattere di universalità o per necessità, ma possiedono una portata sufficiente per dirigere il pensiero. Non hanno un carattere convenzionale, ma di solito un alto grado di generalità, che permette loro di essere applicate in vari settori. Una categoria quindi svolge un duplice ruolo. Da un lato, modella il campo della ricerca teorica, rimanendo nel suo centro, ed essendone oggetto di analisi. Dall'altro, è per questa categoria che il ricercatore riesce ad “orientarsi” nel pensiero e agire la sua pratica.

Questo è esattamente quanto accaduto con il concetto di ostacolo epistemologico. Ha iniziato a dirigere il pensiero di qualche scienziato, poi si è sviluppato in un programma di ricerca intorno a esso, mentre, allo stesso tempo, animava i dibattiti scientifici e culturali. Ora, questa tendenza in didattica della matematica sta lentamente spegnendosi, ci sono altre domande e nuove parole che occupano posti più centrali. La nozione di ostacolo epistemologico non è cresciuta abbastanza. O almeno non ha prodotto una definizione con un consenso ampio¹. È possibile che la caratteristica principale di una categoria sia proprio la difficoltà di afferrarla in una definizione, che sia difficile racchiuderla all'interno di una teoria rigida. Una categoria non appartiene al mondo delle teorie. Se funziona il modo in cui dirige il pensiero è perché da qualche parte nel campo della ricerca questa si adatta bene. È descritta meglio con l'uso che se ne è fatto e da quali domande e quali spiegazioni ha aiutato a costruire, da che tipo di discorso si è sviluppato intorno a tutto ciò. Lo stesso Bachelard non ha mai dato una definizione del suo *obstacle épistémologique*. Egli ci ha fornito solo una serie di esempi, di differenze tra la fisica nel XVIII secolo e quella contemporanea e il suggerimento che questa nozione sia utile per comprendere il pensiero scientifico. Gli ostacoli possono essere trovati nelle tendenze umane di generalizzazioni affrettate, o per spiegare tutto con metafore, o le leggi universali, o, ancora, con la ricerca di una sostanza responsabile di un fenomeno. Gli ostacoli erano lì sul percorso di cambiamento dal pensiero ordinario al pensiero scientifico, da un tipo di razionalità a un altro tipo di razionalità.

Non è l'unica via, ce ne sono altre possibili, e forse più adeguate a dare descrizioni interpretative. Il concetto di “Episteme” intrecciata con l'archeologia del sapere (1973) di Michel Foucault ne è certamente un valido esempio. È abbastanza vicina alla metodologia storico-empirica adottata dagli insegnanti di matematica, nel senso che Foucault guarda alla cultura diacronicamente, e non sincroni-

1 Nel 1988 a Montréal si tenne una conferenza mondiale interdisciplinare il cui scopo in parte era proprio quello di chiarire la nozione di ostacolo epistemologico. In quell'occasione i partecipanti si sono salutati con una sensazione di confusione più grande di quando erano giunti (Bednarz e Garnier, 1989).

camente (o spazialmente)². Inoltre, si concentra più sul dato per scontato e inconscio della scienza. Qui si trovano e agiscono gli ostacoli epistemologici. Ma confrontando gli *a priori* di epoche diverse, si scopre come gli ostacoli rivelano le differenze fondamentali. Va precisato che Foucault considera gli ostacoli in senso positivo. Vale a dire, ritiene che essi costituiscono il terreno, lo “spazio epistemologico” che ha determinato il tipo di domande scientifiche e i modi di avvicinamento, tipici di una data epoca. Foucault sottolinea come, da un lato, la storia della scienza traccia il progresso della scoperta, la formulazione di problemi, e lo scontro polemico, descrive i processi e i prodotti. Ma, d'altra parte, cerca di ripristinare ciò che sfuggiva. Ovvero le influenze, le filosofie implicite, le tematiche non formulate, gli ostacoli invisibili e quelli inconsci.

La teoria di Foucault può anche essere vista come il migliore raccordo con la nozione di ostacolo epistemologico di Bachelard. Entrambi gli autori, infatti, appartengono alla stessa tradizione filosofica che è in contrasto con quella anglosassone di Hall³.

Vale però la pena approfondire anche la via tracciata da Hall, non fosse altro perché, a differenza di Foucault, guarda a molte culture diverse, non solo quella sviluppata dalla civiltà occidentale. Questa prospettiva pone la questione di una relatività degli ostacoli epistemologici che non solo sono diacronici, ma si diffondono attraverso i diversi *background* culturali coesistenti che gli studenti si portano oggi come proprio bagaglio esistenziale. Il presupposto meta-epistemologico è che consideriamo la realtà effettiva del processo di comprensione degli studenti, non i modelli o le teorie che si costruiscono o si sono costruite su di esso. In questo senso, il concetto di ostacolo epistemologico, in forma implicita o con nomi diversi, forme, contesti e impostazioni filosofiche diverse può essere trovato in molti filosofi prima e dopo Bachelard⁴.

2. Vincoli di sviluppo e culturali

La scienza della matematica ha raggiunto la precisione assoluta sacrificando il contatto con la realtà. Ora possiamo muoverci liberamente su tutto il suo dominio, che in precedenza era irto di ostacoli. Ma questi ostacoli non sono scomparsi. Sono stati semplicemente sospesi, e, come sostiene Poincaré, dovranno essere conquistati di nuovo se si vuole attraversare la frontiera e penetrare nel regno

2 Come ad esempio fa la teoria di Hall.

3 In questa situazione dicotomica si trova la stessa differenza di prospettive che separa la filosofia analitica anglosassone, come praticata, ad esempio, da Ryle e Austin, e la linguistica strutturale dei francesi Lévy-Strauss e Jakobson.

4 Ad esempio Husserl ha sottolineato la discontinuità tra la conoscenza comune o pratica che rimane indiscussa, data per scontata, e l'atteggiamento scientifico. Alla fine del secolo, la consapevolezza dei determinanti sociali e culturali della conoscenza scientifica è apparso nelle opere di Durkheim, Granet, Halbwachs, Scheeler e molti altri. Senza riferimento a Bachelard, idee simili appaiono nelle opere di Schütz, Garfinkel, Cicourel. Un filosofo polacco, Florian Znaniecki (1882-1958), nei suoi ruoli sociali degli scienziati, ha descritto molti diversi standard di ciò che è e ciò che non è scientifico e significativo (Kaczynski, 2002). La teoria delle rivoluzioni scientifiche di Kuhn mostra come il cambiamento può essere la verità scientifica, come le categorie fondamentali del pensiero e delle regole della razionalità possono variare da un paradigma all'altro. E così via fino alle opere di Popper e Lakatos.

della pratica. (Henri Poincaré, 1952) La comprensione è legata al superamento di questi ostacoli sia per ragioni evolutive sia culturali. Ciò che una persona comprende e in che modo ritiene di farlo, non è indipendente dal suo stadio di sviluppo, dalla lingua in cui comunica, dalla cultura di è parte. Le sue convinzioni, le sue “norme cognitive”, la sua visione del mondo possono essere tutte fonti di ostacoli alla comprensione dei quadri teorici del sapere scientifico contemporaneo. I suoi concetti non possono essere più elaborati nel rispetto della sua fase di sviluppo, soprattutto se il livello delle sue capacità vocali e tecniche hanno già superato questa fase.

A questo proposito si rivelano particolarmente utili gli studi di L.S.Vygotski⁵ sulla teoria dello sviluppo cognitivo e quelli di E.T. Hall⁶ sulla teoria della cultura (Sierpinska, 1988; 1993). Seguendo Vygotski si comprende come dagli studi sperimentali sullo sviluppo dei concetti e delle nozioni matematiche nel bambino si costituiscono gli ostacoli nel pensiero dell'adolescente. Dall'altra parte la teoria della cultura di Hall sarà funzionale a spiegare come gli ostacoli epistemologici attivano la comunità scientifica. Inoltre, come questa poi incida sulla trasformazione del modo in cui il sapere scientifico sarà trasmesso attraverso la socializzazione e l'educazione. Si comprende, pertanto che “sviluppo” e “cultura” sono strettamente correlate. Ma qual'è la loro relazione?

3. Il rapporto tra sviluppo e cultura

3.1. Sviluppo e Istruzione

La conoscenza scientifica o, in generale, quello che noi chiamiamo “ragione”, non viene a essere “calata dall'alto” sull'esperienza (Dewey). È invece suggerita e verificata da quest'ultima. È continuamente impiegata per allargare e arricchire l'esperienza stessa. Vygotskij opera una distinzione importante e utile dal punto di vista didattico. Distingue i concetti in “spontanei” e “scientifici”. Spiega che la prima comparsa di un concetto spontaneo è spesso legata a un'interazione del bambino con un oggetto. Mentre il concetto scientifico si manifesta attraverso una relazione mediata. Nel primo caso, dunque, il bambino passa dall'oggetto al concetto, mentre nel secondo percorre la strada inversa. I concetti scientifici si

- 5 Qui si pensa a quanto Vygotskij afferma riguardo allo sviluppo del bambino e al ruolo integrante e integrato che assumono il linguaggio e il pensiero pratico. In particolare per produrre e potenziare la capacità di usare degli strumenti. Egli si pone in contraddizione con le posizioni degli psicologi. Questi ritengono che il sistema di attività di un individuo è determinato dal grado di sviluppo organico e dal livello di padronanza degli strumenti ed è quindi indipendente dal linguaggio. Al contrario Vygotskij sostiene che l'uso del linguaggio consente di organizzare l'attività pratica con una struttura diversa da quella possibile senza il linguaggio. Secondo Vygotskij linguaggio e uso di segni sono incorporati in qualsiasi azione, e ciò produce una trasformazione e una riorganizzazione della stessa azione. Su questo argomento e sulla importanza della relazione socio-costruttivista dell'apprendimento si veda Ellerani P., *Costruire la comprensione attraverso ambienti reali e virtuali: il costruttivismo socio-culturale, la nuova scienza dell'apprendere*. In <<http://www.tutorspace.net/files/Costruire-la-comprensione....pdf>>.
- 6 Hall, com'è noto, sostiene che ogni cultura ha bisogno di un habitat congeniale di cui si deve tenere conto. Esistono poi quattro distanze e otto fasi entro cui le persone interagiscono col territorio e con gli altri.

distinguono da quelli spontanei per un diverso rapporto con l'esperienza, ovvero per una differente relazione instaurata dal bambino con il loro oggetto o con altri concetti.

Considerare quindi la questione del rapporto tra sviluppo e istruzione significa rimettere in discussione la relazione tra concetti spontanei e scientifici. Si evince in modo diretto che la relazione tra istruzione e sviluppo è molto articolata⁷. L'istruzione influenza lo sviluppo, ma non in modo diretto. Infatti, sarebbe un errore pensare che l'insuccesso di uno studente in aritmetica in un determinato semestre, rappresenti necessariamente lo stato di avanzamento del suo sviluppo interno per quel periodo. Se ci rappresentiamo come delle curve geometriche tanto il processo educativo quanto lo sviluppo delle funzioni mentali che sono direttamente coinvolte in questa attività, troveremo che queste non coincidono. Il loro rapporto è estremamente complesso.

Ad esempio, si è soliti iniziare l'insegnamento di aritmetica dalla somma e si termina con la divisione. C'è una sequenza interna che lega tutte le conoscenze che verranno presentate. Dal punto di vista evolutivo, tuttavia, le varie caratteristiche e componenti di questo processo possono avere un significato completamente diverso. Vygotski sostiene qualcosa di molto importante in proposito. Afferma che l'istruzione non può sempre aspettare che lo sviluppo sia pienamente realizzato. Spesso deve fare da traino. D'altra parte gli interventi d'insegnamento devono essere saggiamente dosati. Vale a dire devono essere utilizzati al momento opportuno e al giusto livello. Ossia, devono essere situati all'interno di ciò che egli ha chiamato la "zona di sviluppo prossimale". Ovviamente, se l'istruzione non interviene al momento giusto alcune capacità intellettuali non potranno avere la possibilità di svilupparsi. Ad esempio, allo studente deve essere data la possibilità, di solito in periodo adolescenziale, d'impegnarsi in ragionamenti più formali e deduzioni al momento dello sviluppo del pensiero concettuale. Se non gli è consentito di esercitarsi in tal senso, avrà grandi difficoltà a potenziare lo stile e il livello di pensiero necessario per comprendere e costruire dimostrazioni matematiche.

3.2. Sviluppo come affare sociale

Istruzione, sapere, conoscenza scientifica sono nozioni culturali, vengono comunque integrate in una cultura e sono parte attiva del processo di formazione e di sviluppo della stessa cultura a cui appartengono. Secondo Vygotskij lo sviluppo è un affare culturale. E di conseguenza è anche un affare sociale. Gli psicologi sociali sostengono che diversi sistemi culturali e d'interazione sociale influenzano lo sviluppo cognitivo individuale. Mentre allo stesso tempo le interazioni sociali in culture diverse hanno elementi comuni che influenzano l'avvio dello sviluppo cognitivo. Infatti, ricerche statistiche hanno dimostrato una relazione tra i fallimenti scolastici degli studenti e lo stato socio-economico dei loro genitori. Gli sforzi per spiegare questo stato di cose hanno portato alcuni psicologi alla conclusione che non è il basso grado d'intelligenza che è responsabile per gli errori degli studenti. Tutt'altro, sono le condizioni psico-sociali in cui questi bambini vivono (vedi, ad esempio, Vial et al., 1974, citato da Perret-Clermont, 1980).

7 Riferimento importante per approfondire questioni relative all relazione insegnamento-apprendimento è Colazzo (2005).

C'è un intero movimento in didattica della matematica, oggi chiamata "etnomatematica", che studia il pensiero matematico in culture diverse. Si propone di fondare l'insegnamento della matematica nelle scuole su problemi e in contesti che sono familiari e significativi negli ambienti culturali degli studenti. Ciò per favorire gli studenti all'uso di qualunque mezzo che possa essere utile a risolvere questi problemi. Naturalmente, vi è il rischio, che questo si traduca in uno sviluppo spontaneo degli studenti, che può essere disastroso almeno per quanto ci ha mostrato Vygotskij.

Il dato è che ciò che ciascuno sarà in grado di capire dipenderà dall'ambiente in cui vive. Quindi non solo dalle particolarità del cervello umano e dai vincoli di sviluppo geneticamente determinati, ma anche e soprattutto dalla cultura in cui il soggetto vive. Il linguaggio utilizzato nell'ambiente del bambino può favorire alcune immagini piuttosto che altre. Ad esempio, l'abbondanza di nomi in alcune lingue e la maniera astratta dei costrutti utilizzati per parlare, possono ispirare un modo d'intendere. Questo modo d'intendere "reifica" il mondo, lo riempie con "cose" stabili e fisse, piuttosto che con i processi, cambiamenti dinamici e forme in continua evoluzione.

Un oggetto di comprensione per diventare tale deve essere notato. Una madre insegnerà al suo bambino a mangiare con un cucchiaino. Farà in modo che questo oggetto venga notato e identificato come uno strumento utile a portare il cibo alla bocca. Il bambino impara imitando il comportamento e acquisisce, senza saperlo, taluni comportamenti che lo aiutano ad affrontare i problemi e risolverli. Le culture, di conseguenza, determinano anche i propri ostacoli epistemologici. Vale a dire cose che sono così evidenti e "naturali" che nessuno penserebbe di metterle in discussione anche per paura di essere bollato come un blasfemo. Ovviamente è estremamente difficile rendersi conto della loro esistenza e, per certi versi, se si è consapevoli di un ostacolo si è anche molto vicini al suo superamento.

Gli antropologi hanno cercato di renderci più consapevoli della "dimensione nascosta", implicita, del non detto, della nostra cultura (Hall, 1969 1976 1981; Hook, 1969). Hanno cercato di spiegare la difficoltà di comunicazione che esiste tra i diversi gruppi etnici. Ma ci possono essere difficoltà simili nella comunicazione tra la comunità scientifica e i profani, tra docenti e studenti, tra pensiero scientifico e senso comune. La dimensione culturale dell'apprendimento della matematica è cresciuta anche all'interno del dibattito sull'educazione matematica (Bishop, 1988, 1991; Chevallard, 1990, 1992; Keitel et al., 1989; Mellin-Olsen, 1987; Vasco, 1986, per citarne solo qualche). In realtà, la dimensione culturale nello studio dei processi d'insegnamento e di apprendimento in matematica sono apparsi almeno fin verso la metà degli anni '70 del secolo scorso⁸. Ciò che si ritiene di dover aggiungere, come si è detto in precedenza, è il contributo di Hall. Egli descrive la cultura come un "forma di comunicazione" (Hall, 1981, p. 49) o come "un modo appreso e condiviso di comportamento" (p. 66). L'insegnamento e l'apprendimento sono fondamentali in una cultura. Hall sostiene che metodi d'inse-

8 In particolare, in area francofona e alemanna sotto l'influenza di sociologi dell'educazione, come Basil Bernstein l'istruzione ha iniziato a essere vista come "trasmissione di cultura" (ad esempio, Bernstein, 1971; anche, Marody, 1987). I concetti di "contratto didattico", "situazione didattica" di Guy Brousseau, o di "trasposizione didattica" di Yves Chevallard, gli studi della cultura invisibile della matematica di Heinrich Bauersfeld sono fondamentali ed emblematici.

gnamento determinano, in un certo senso, tutti gli altri componenti della cultura. L'apprendimento è un'attività altrettanto importante per la sopravvivenza, come sonno, acqua e cibo.

Egli sostiene che i gradi di sperimentazione del mondo che l'uomo mette in atto sono tre. Tanti quanti i modi di trasmissione dell'esperienza per i bambini, i tipi di coscienza, le relazioni emotive. Questi livelli sono: il "formale", l'"informale", il "tecnico". Il livello di "formale" è quello delle tradizioni, convenzioni, opinioni indiscusse, costumi sanzionati e riti che non richiedono una giustificazione. La trasmissione di questo livello di cultura si basa su monito diretto ed esplicita correzione degli errori senza spiegazioni. I sistemi formali sono normalmente molto coerenti al loro interno. Sono frutto di un lavoro di solidificazione di molte generazioni. Per le persone che vivono in comunità, giocano un ruolo analogo a quello giocato dall'istinto per gli animali. Il livello "informale" è quello degli schemi, spesso inespressi, di comportamento e di pensiero. La nostra conoscenza del nuoto, della guida appartengono a questo livello di cultura se non capita di essere maestri di queste abilità. Questo livello di cultura è acquisita attraverso l'imitazione, la pratica e la partecipazione, non si segue un insieme d'istruzioni. Molto spesso né colui che è imitato né l'imitante sanno che qualche processo d'insegnamento-apprendimento è in corso. A livello "tecnico", la conoscenza è esplicitamente formulata. Questa conoscenza è analitica, volta a essere logicamente coerente e razionalmente giustificata. Il processo d'insegnamento ha una forma coerente. La conoscenza appartiene al docente. Le sue abilità sono funzione della sua conoscenza e capacità di analisi. Se egli ha chiaramente e coscienziosamente analizzato il materiale, persino la sua presenza fisica potrebbe non essere necessaria, può essere mediata.

Hall quindi definisce la cultura come composta da modelli di comportamento formali che costituiscono un nucleo intorno al quale ci sono alcuni adattamenti informali. Il nucleo è anche supportato da una serie di puntelli tecnici (ibidem, p. 91). Inoltre, è necessario sottolineare che il contenuto dei livelli di cultura non è qualcosa stabile e fisso. I contenuti cambiano notevolmente da una cultura all'altra, come anche all'interno di una stessa cultura. Elementi del piano formale possono essere spinti nell'implicito e nell'informale. Può accadere che un'idea nasca nell'ambito tecnico e contraddice le credenze comuni del piano formale. Questa viene pubblicamente respinta da coloro che si considerano responsabili per le norme, di carattere scientifico o morale o religioso o altro. Ma con il tempo e l'uso l'idea potrebbe spostarsi al livello formale e diventare un nuovo tipo di credenza. Infatti, ogni idea scientifica davvero significativa nasce come eresia e muore come un pregiudizio.

Le regole del buon senso e di razionalità prevalenti in una determinata epoca e cultura sembrano corrispondere ai tre livelli della cultura di Hall. Riprendendo il concetto di episteme di Foucault possiamo considerarlo come categoria correlata. Infatti, le categorie normalmente funzionano senza troppe giustificazioni, dirigendo il pensiero, determinando le questioni importanti, favorendo una visione del mondo. Quando iniziano a essere messe in discussione, la società è pronta per un cambiamento. Le regole del senso comune di solito non sono completamente articolate e possono essere inconsce, ma costituiscono ciò che guida il modo, danno significato agli eventi, ai fenomeni; ordinano il mondo. Possiamo dire che appartengono al livello "informale" di Hall. Le regole della razionalità, a loro volta, sono più adeguatamente adagate sul livello "tecnico" di cultura. Diverse epoche caratterizzano la razionalità in modi diversi, ma l'articolazione dei significati, la giustificazione delle dichiarazioni e la generalità sono probabilmente le caratteristiche comuni. Le differenze appaiono nelle norme di questa articolazione, giustificazione e generalità.

3.3. La cultura matematica

Anche nella cultura matematica è possibile individuare tre livelli di sperimentazione del mondo. Tre modi di trasmissione di questa esperienza, tre tipi di coscienza ed altrettanti stili di relazioni emotive che possono essere distinti in: “formali”, “informali”, e “tecnici”. La matematica, infatti, può essere considerata come un sistema di sviluppo di cultura. E, a sua volta, come una sub-cultura di una più generale all’interno della quale essa si sviluppa (Wilder, 1981). Si può ritenere che il livello “tecnico” di una cultura matematica sia quello delle teorie, della conoscenza che viene verbalizzata e giustificata in un modo che venga ampiamente accettata dalla comunità dei matematici. A livello “formale” la nostra comprensione si fonda su credenze; a livello “informale” sugli schemi di azione e di pensiero. Il livello “informale” corrisponde a ciò che Polanyi chiama conoscenza tacita, quel non detto che comunque aiuta ad avvicinarsi e a risolvere i problemi. Questo è anche il livello dei canoni di rigore e delle convenzioni implicite su, per esempio, come giustificare e presentare un risultato matematico. Possiamo anche essere utenti passivi della matematica, ma soltanto attraverso “imitazione e pratica”, come diceva Polya, possiamo imparare a porre domande significative, a lanciare ipotesi, generalizzazioni, spiegare e dimostrare. Questo può avvenire soltanto sul piano “informale”, vale a dire lavorando/imitando i matematici.

I livelli “formale”, “informale” e “tecnico”, seppur autonomi dal punto di vista della loro identità, sono in costante interazione reciproca. Questa caratteristica della cultura rende possibile i cambiamenti, la caduta di visioni del mondo, l’ascesa di teorie nelle nostre rappresentazioni della struttura della materia, del tempo e dello spazio, del numero (Kuhn). Questa caratteristica della cultura rende possibile la comprensione. Come diceva Bachelard la conoscenza acquisita attraverso uno sforzo scientifico può rifiutare se stessa. Un ostacolo epistemologico si incrosta sulla conoscenza indiscussa. Le abitudini intellettuali, inizialmente sane e utili, possono, a lungo termine, ostacolare la ricerca. La nostra mente, diceva giustamente Bergson, ha una tendenza irresistibile a considerare come più chiara l’idea che serve più spesso. La domanda cruciale resta

Quello che è considerato come ovvio e naturale, ciò che è indiscusso, sarà, in qualche misura, ciò che determinerà quel che sarà considerato problematico. Quali domande e ipotesi saranno poste e quali saranno i modi di attaccarle? D’altra parte, i problemi determineranno i risultati che saranno ottenuti, cioè, ciò che sarà considerato come il “corpo giustificato di conoscenze scientifiche o tecniche”.

Alla luce di questo discorso, il processo di insegnamento/apprendimento può essere modellato come una sequenza di situazioni che si traduce in nuova costruzione di conoscenza da parte degli studenti (Brousseau, 1997). L’insegnante è responsabile dell’attribuzione di un compito significativo che supporta la progettazione di una situazione didattica. Quando si crea una situazione a-didattica, gli studenti sono responsabili della realizzazione degli scopi di apprendimento, e il ruolo dell’insegnante è quello di facilitare questa realizzazione. Sulla base della teoria delle situazioni didattiche, Simon (1997) ha suggerito un modello d’insegnamento della matematica ciclico. Gli insegnanti progettano una traiettoria di apprendimento ipotetica in base ai vari tipi della conoscenza che possiedono. La traiettoria comprende tre elementi correlati: obiettivi di apprendimento, le attività di apprendimento (attività), e l’ipotesi del processo di apprendimento. Quando si proietta questa ipotetica traiettoria in classe, gli insegnanti hanno bisogno di regolarlo in base alle loro interazioni con gli studenti. Queste regolazioni portano gli insegnanti a nuove comprensioni che precedono la prossima progettazione.

Senza andare oltre nella descrizione di modelli di relazioni cicliche tra progettazione e pratica didattica, possiamo affermare che la letteratura scientifica suggerisce che la caratteristica fondamentale di un buon insegnante resta la capacità di essere un “professionista riflessivo” (Schön). In particolare la capacità di riflettere durante la pratica di insegnamento per sostenere il processo esperienziale degli allievi (ad esempio, Dewey, 1933 Schön, 1983; Jaworski, 1998; Berliner 1987, 1994). Jaworski (1998) e Mason (2002) distinguono tra la riflessione dopo l’azione e riflessione in azione. Muratore ha anche aggiunto la riflessione-attraverso l’azione. Mason sostiene che queste distinzioni sono piuttosto vaghe, in quanto possono essere diverse a seconda dell’obiettivo, della portata dell’intenzionalità della riflessione, dell’attenzione e della consapevolezza del docente.

Conclusioni

Per riassumere, a nostro avviso, l’educazione matematica coinvolge una vasta gamma di oggetti, azioni, attività e strumenti propri della disciplina, ma costruiti in un contesto socio-pedagogico. Ogni dialogo produttivo tra teoria e pratica che si voglia sostenere nell’ambito specifico dell’educazione matematica deve svolgersi in dialettica tra il contesto concreto e l’astrazione contestualizzata. Il contesto deve svolgere un ruolo fondamentale, nel senso che è utile in diversi modi: collega diversi punti di vista, che si basano su diverse attività professionali, e offre la creazione di connessioni referenziali con significati e aspetti particolari ancorché comparabili.

A questo proposito, la comunicazione, i materiali della mediazione nel rapporto tra teoria e pratica hanno bisogno di rivelare diverse componenti concettuali:

- Un oggetto di riferimento comune;
- Generalizzazioni specifiche della conoscenza (matematica, epistemologia, professionalità) legata al particolare dominio di esperienza;
- Mezzo di condivisione sociale e scambio di situazioni comunicative.

Il dialogo tra teoria e pratica nella didattica della matematica non può mirare a un mezzo diretto di trasferimento di conoscenze, ma può solo offrire occasioni per una di ricostruzione auto-referenziale di tutti gli aspetti della conoscenza professionale necessaria per l’insegnante. Queste occasioni produttive si basano sul requisito che l’insegnante sia sempre pronto per esplorare i rapporti concepibili tra la complessità di una situazione concreta esemplare e la sua destinazione. La nuova conoscenza non può essere semplicemente “donata” agli studenti e gravemente inattivabile. L’insegnante, per favorire i processi di generatività e di attivazione deve essere a conoscenza del modo in cui gli studenti stanno cercando di ricostruire il significato dei segni e delle operazioni che ha presentato. Ciò non soltanto su un piano di processualità psicologica, bensì come attivazione agita in un orizzonte socio-culturale. La discussione condivisa e il dialogo tra diverse pratiche potrà influire positivamente su questa presa di coscienza.

Riferimenti bibliografici

- Bachelard, G. (1983). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Presses Universitaires de France (First published in 1938).
- Berliner, D. C. (1987). Ways of thinking about students and classrooms by more and less experienced teachers. In J. Calderhead (Ed.). *Exploring teachers' thinking* (pp. 60–83). Great Britain: Cassell Educational Limited.
- Berliner, D. C. (1994). Teacher expertise. In B. Moon & A. S. Mayes (Eds.), *Teaching and learning in the secondary school* (pp. 107–113). New York: Routledge.
- Bernstein, B. (1971). *Class, codes and control*. London: Routledge and Kegan Paul.
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematics enculturation: a cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Bishop, A. J. (1991). 'Toward a cultural psychology of mathematics—A review of "Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding" by Geoffrey, B.Saxe'. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 1, 76–80.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. The Netherlands: Kluwer.
- Chevallard, Y. (1990). 'On mathematics education and culture: critical afterthoughts'. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 3–27.
- Chevallard, Y. (1992) 'Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique'. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12, 1, 73–112.
- Colazzo, S. (2005). *Insegnare ed apprendere in rete*. Castrignano dei Greci: Amaltea.
- DEWEY, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. Boston: D.C. Heath and Co.
- Ellerani P. (2015). *Costruire la comprensione attraverso ambienti reali e virtuali: il costruttivismo socio-culturale, la nuova scienza dell'apprendere*. SIM. <<http://www.tutorspace.net/files/Costruire-la-comprensione....pdf>>.
- Foucault, M. (1973). *The Order of Things. An Archeology of Human Sciences*. New York: Vintage Books.
- Hall, E. T. (1969). *The Hidden Dimension*. New York: Anchor Press, Doubleday.
- Hall, E. T. (1976). *Beyond Culture*. New York: Anchor Press, Doubleday.
- Hall, E. T. (1981). *The Silent Language*. New York: Anchor Press, Doubleday (First edition: 1959).
- Heidegger, M. (1962). *Being And Time*. New York: Harper And Row.
- HOOKE, S. (Ed) (1969). *Language and Philosophy. A Symposium*. New York: New York University Press.
- Jaworski, B. (1998). Mathematics teacher research: Process, practice, and the development of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), 3–31.
- Kaczynski J. G. (2002). *Conoscenza come professione. La sociologia della conoscenza di Florian Znaniecki*, Milano: Franco Angeli.
- Keitel, C., Damerow, P., Bishop, A. J. and Gerdes, P. (Eds) (1989). *Mathematics, Education and Society*. Paris: UNESCO.
- Marody, M. (1987). *Technologie intelektu*. Poland: PWN.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. New York: Falmer.
- Mellin-Olsen, S. (1987). *The Politics of Mathematics Education*. Dordrecht, Holland: Reidel.
- Perret-Clermont, A. N. (1980). *Social Interaction and Cognitive Development in Children*. London: Academic Press.
- Poincaré, H. (1952). *Science and Method*. New York: Dover (Translated by Francis Maitland).
- Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.
- Sierpinska, A. (1988). 'Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique', in Bednarz, N. and Garnier, C. (Eds) *Construction des savoirs, Obstacles et conflits*. Montréal: Agence d'ARC.

- Sierpiska, A. (1993). 'On the development of concepts according to Vygotski', *FOCUS on Learning Problems in Mathematics*, 15, 2–3.
- Simon, M. A. (1997). Developing new models of mathematics teaching: An imperative for research on mathematics teacher development. In E. Fennema & B. Scott-Nelson (Eds.). *Mathematics teachers in transition*. (pp. 55–86). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vasco, C. E. (1986). 'Learning elementary school mathematics as a culturally conditioned process', in WHITE, M. I. and POLLAK, S. (Eds) *The Cultural Transition: Human Experience and Social Transformation in the Third World and Japan*. Boston: Routledge and Kegan Paul, pp. 141–73.
- Vial, M., Stambak, M., and Burgviere, E. *et al.* (1974). 'Caractéristiques psychologiques individuelles, origine sociale et échecs scolaires', in 'Pourquoi les échecs scolaires dans la première année de la scolarité', *Recherches Pédagogiques*, 68. Paris: INRDP.
- Vygotskij, L. S. (1987). 'Thinking and speech', in Rieber, R.W. and Carton, A.S. (Eds) *The Collected Works of L.S.Vygotski* (Translations by Norris Minick). New York: Plenum Press.
- Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a Cultural System*. New York: Pergamon Press.