

# Il metodo Feuerstein e il recupero in matematica: apprendimento mediato, scorrevole e flessibile

## The Feuerstein Method and Remedial Action in Mathematics: Mediated, Smooth and Flexible Learning

Rita Conti

Istituto di Istruzione Superiore “Chino Chini” - Borgo San Lorenzo (Firenze)  
rita.conti@istruzione.it

Paola Panico

Istituto di Istruzione Superiore “Chino Chini” - Borgo San Lorenzo (Firenze)  
paola.panico@istruzione.it

### ABSTRACT

Two High School teachers, respectively of Mathematics and Italian Language and Literature, both IEP (Instrumental Enrichment Programm) Standard Method Feuerstein applicators, have been working for several years applying the IE methodology to mathematics lessons. In the study of mathematics, mental representations and symbolic operations require a strong use of abstract thinking. Therefore, the two teachers thought to work on them through the IEP instruments, identifying the inadequate cognitive functions. When students study mathematics, often they do not find their way, they are headlong and absent-minded.

So they must learn to control their impulsiveness, in order to analyze their deliveries, and apply logical and metacognitive processes. The two teachers describe the methodology used in their lessons and two examples of how maths can be taught and learned through the Feuerstein method. The first example includes a lesson plan and the associated cognitive map. As a result of this work, students are more accurate and confident, they concentrate on delivery, they identify strategies and plan their task. They begin to correct themselves and to activate some spontaneous metacognitive processes. This way of working also improved the professional skills of the two teachers. The same method can be used with other school subjects. In time, the two teachers hope to have a whole class team formed by a group of experienced mediators.

Due insegnanti, una di Matematica e l'altra di Lettere di un Istituto di Istruzione Superiore di Borgo San Lorenzo (Firenze), entrambe applicatrici degli strumenti PAS Standard, lavorano da alcuni anni sull'insegnamento della matematica attraverso la metodologia PAS. Nell'insegnamento/apprendimento della matematica, le rappresentazioni mentali e le operazioni simboliche richiedono un uso intensivo del pensiero astratto. Di conseguenza, le due insegnanti hanno ritenuto di utilizzare gli strumenti PAS per identificare le funzioni cognitive carenti. Nello studio della matematica, gli allievi spesso non sanno orientarsi, sono impulsivi e distratti. Devono perciò imparare a controllare la propria impulsività, ad analizzare ciò che producono, ad applicare procedure logiche e metacognitive. Le due insegnanti descrivono la metodologia utilizzata durante le lezioni e due esempi di come la matematica possa essere insegnata e appresa attraverso il metodo Feuerstein. Il primo esempio include la pianificazione delle lezioni e la relativa carta cognitiva. A seguito di questo lavoro, gli studenti si mostrano più precisi e sicuri, si concentrano al momento della consegna, identificano le strategie e pianificano il compito. Cominciano a correggersi e ad attivare alcuni processi metacognitivi spontanei. Questo modo di lavorare ha anche migliorato le competenze professionali delle due insegnanti. Lo stesso metodo potrebbe essere impiegato con altre materie. Col tempo, le due insegnanti sperano di avere un consiglio di classe interamente formato da un gruppo di esperti mediatori.\*

### KEYWORDS

Feuerstein, IEP, Instrumental Enrichment Program, remedial, mathematics, maths.  
Feuerstein, PAS, Programma di Arricchimento Strumentale, recupero, matematica.

\* Rita Conti è autrice di: §§ 4, 5, 6, 7; Paola Panico è autrice di: Introduzione, §§ 1, 2, 3, Conclusione.

## Introduzione

Due insegnanti, una di Matematica e l'altra di Lettere di un Istituto di Istruzione Superiore di Borgo San Lorenzo (Firenze), entrambe applicatrici degli strumenti PAS Standard, lavorano da alcuni anni sull'insegnamento della matematica attraverso la metodologia PAS.

Nelle scuole la matematica è nota come la disciplina che registra il maggior numero di insufficienze con conseguente demotivazione (se non repulsione) da parte degli studenti, e scoraggiamento da parte degli insegnanti (Hoffmann, Lenhard, Seeger, 2005). Ciò ha indotto le due autrici a intraprendere un percorso di riflessione per sondare nuove vie più efficaci e inclusive tra cui il metodo PAS, che lavora sull'identificazione delle operazioni cognitive carenti e sul loro potenziamento (Feuerstein, Feuerstein, Falik, Rand, 2008).

L'idea di applicare il metodo alla matematica deriva dalla consapevolezza, da parte delle due insegnanti, che le rappresentazioni mentali e le operazioni simboliche che caratterizzano la matematica richiedono un forte uso del pensiero astratto, necessario affinché gli studenti riescano a gestire queste rappresentazioni in modo logico e coerente (Schoenfeld, 1987).

### 1. Motivazione

È apparso inevitabile trasferire le operazioni mentali attivate dagli strumenti PAS, in particolare *Organizzazione di Punti*, *Orientamento spaziale 1*, *Orientamento spaziale 2*, *Classificazioni*, *Confronti*, *Percezione analitica*, *Immagini* (Feuerstein, 1995), sulla matematica (Feuerstein, Feuerstein, Falik, Rand, 2008), visto che le modalità di apprendimento degli studenti sono spesso caratterizzate da disattenzione, distrazione e superficialità. Si è reso necessario, inoltre, individuare le funzioni cognitive necessarie per trasformare le operazioni mentali in azioni concrete nello svolgimento di compiti e nella risoluzione di problemi (Ping Xin, 2012).

### 2. Posizione del problema

Nello studio della matematica, gli studenti spesso non sanno orientarsi, non hanno punti di riferimento, sono impulsivi e distratti. Poiché difettano di capacità di astrazione e non riescono a collegare logicamente i vari passaggi, divengono importanti il controllo dell'impulsività, l'analisi delle consegne e l'attivazione di procedimenti logici e metacognitivi (Schoenfeld, 1987). Talvolta lo svolgimento dell'esercizio viene compromesso solo perché non si presta attenzione alla grafia corretta di un numero. La mediazione consiste allora semplicemente nel trasmettere l'importanza della precisione e della chiarezza grafica.

### 3. Quadro metodologico

Si presenta l'argomento agli studenti e si ragiona sul motivo per cui lo si affronta. Importante la disposizione a isola dei banchi. Si somministrano le pagine e si lavora su operazioni cognitive che vengono poi trasferite alla risoluzione di un problema di matematica. Le applicatrici lavorano in coppia: mentre una, inse-

gnante di matematica, guida lo svolgimento degli esercizi, l'altra, insegnante di italiano, funge da osservatrice partecipe e registra ciò che avviene. (Minuto, Ravizza, 2008).

Si riprendono gli argomenti della lezione precedente per cristallizzarne i contenuti e riflettere su quanto imparato. Si analizza attentamente la consegna. Viene stimolata l'osservazione sistematica per controllare gli automatismi, e si invitano gli studenti a riflettere sulla procedura. Si fa tesoro di ogni microcambiamento, che lo studente vive come un grande risultato. Si parte sempre da quello che si sa, come nelle pagine *Organizzazione di Punti*. L'errore non viene vissuto come "colpa", ma come occasione per risalire alla regola e migliorarsi (Ryan, Williams, 2007). Si lavora sul pensiero ipotetico, poiché fare delle ipotesi significa poi verificarle con il procedimento deduttivo. Il quaderno di matematica viene diviso in due sezioni, una per le formule e l'altra per l'applicazione delle procedure. Importante svolgere operazioni di *bridging* che generalizzino e trasferiscano i processi di pensiero ad altri contesti, ambiti e situazioni. Prima di terminare la lezione, si riflette su ciò che si è imparato e i relativi passaggi fondamentali vengono trascritti sul quaderno che diventa una sorta di diario di bordo da consultare prima di ogni lezione. Le funzioni cognitive carenti vengono rafforzate con le successive pagine PAS.

Tale lavoro si è rivelato molto efficace anche con ragazzi con DSA, attraverso lo scambio dei ruoli (Minuto, Ravizza, 2008). L'insegnante di italiano, non esperta di matematica ma mediatrice Feuerstein, affianca gli studenti "abbandonando" il suo ruolo di docente e "scendendo" al livello degli studenti. Questi ultimi vengono messi nella condizione di "soccorrere" l'insegnante di italiano, apparentemente in difficoltà, e si sentono improvvisamente importanti nel nuovo ruolo. Così cresce in loro l'autostima e la voglia di andare avanti. Nello scambio di ruoli e nel susseguirsi dei tentativi gli studenti si divertono e si motivano. Si corre il rischio di sbagliare più volte, ma in tal caso si ricorre all'insegnante di matematica. L'insegnante "impara" dall'alunno e l'alunno "insegna" all'insegnante attraverso una gestione controllata dell'errore, preziosa e stimolante (Ryan, Williams, 2007).

Si riportano di seguito alcune schede di lavoro e alcuni esempi per offrire un'idea concreta di una lezione di matematica che, attraverso il metodo Feuerstein, si propone di conseguire i seguenti obiettivi:

- comprendere e risolvere il problema;
- utilizzare le varie formule in esercizi di calcolo;
- comprendere e rispettare le relative regole;
- possedere il linguaggio settoriale della materia;
- riconoscere i vari strumenti di calcolo;
- rafforzare i contenuti acquisiti.

Partendo dall'analisi dei contenuti, si cerca di capire la consegna dell'esercizio, individuare gli indizi utili al suo conseguimento e verificarli attraverso un processo di motivazione.

Questo scopo è più facilmente raggiungibile se si parte dall'individuazione e dalla classificazione degli elementi posseduti; il processo permette di restringere il campo d'azione e di avere una visione più chiara dei risultati ottenuti, raggiungendo quindi l'obiettivo richiesto dall'esercizio. Tali operazioni sono necessarie se si vogliono rendere gli studenti consapevoli che la matematica non è ste-

rile calcolo e che i calcoli sono strumenti utili per raggiungere risultati rigorosamente logici, legati a un ambiente di “puro pensiero”.

Quando viene proposto alla classe un problema di matematica, si procede dunque secondo modalità che portino gli studenti a riflettere sulla consegna e ad attivare la procedura logica utile alla risoluzione.

#### 4. Primo esempio

##### 4.1. Analisi del problema (percezione analitica/mediazione dei contenuti)

In un triangolo ABC, l'angolo A è  $30^\circ$  in più dell'angolo C, il quale a sua volta risulta uguale al doppio di  $\hat{B}$ . Quali sono le ampiezze degli angoli del triangolo?

Qual è la consegna del problema?	Trovare l'ampiezza degli angoli del triangolo.	
Gli indizi che hai sono sufficienti?	Si, perché ...	No, perché al momento non ho dati certi da cui partire
Quali indizi, al momento nascosti, emergono dalle conoscenze teoriche sulla figura?	La somma degli angoli interni di un triangolo è $180^\circ$	
Dopo queste riflessioni, quale strategia puoi adottare?	Porre l'ampiezza dell'angolo $B = x^\circ$	

Dati conosciuti	
Dati che ottieni da conoscenze teoriche	Somma degli angoli interni di un triangolo = $180^\circ$
Strategia da adottare	Porre l'angolo $B = x^\circ$
Passaggi per la risoluzione	Dopo aver posto $\hat{B} = x^\circ$ , ottengo: l'angolo $C = 2x^\circ$ e l'angolo $A = 2x^\circ + 30^\circ$

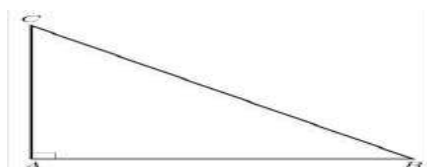
##### 4.2. Sintesi - Risoluzione del problema

Dopo aver evidenziato le ipotesi e la tesi e disegnato la figura, in base allo studio precedentemente effettuato risolvi il problema, motivando ogni passaggio e verificando il risultato ottenuto.

*Ipotesi:* L'angolo A è  $30^\circ$  in più dell'angolo C

L'angolo C è il doppio dell'angolo B

*Tesi:* trovare l'ampiezza degli angoli del triangolo



Poiché l'ampiezza degli angoli A e C dipende dall'ampiezza dell'angolo C, incognito, poniamo l'angolo C =  $x^\circ$ . A questo punto, ricordando, dai dati, che l'angolo B è il doppio dell'angolo C, abbiamo che  $\hat{B} = 2x^\circ$  e quindi  $\hat{A} = 2x^\circ + 30^\circ$ . Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è  $180^\circ$ , traduciamo tale certezza in linguaggio simbolico matematico:

(angolo A + angolo B + angolo C):  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$  da cui  
 $2x^\circ + 30^\circ + 2x^\circ + x^\circ = 180^\circ$ . Questa è un'equazione di primo grado la cui soluzione è data da:

$$2x^\circ + 2x^\circ + x^\circ = 180^\circ - 30^\circ;$$

$$5^\circ x = 150;$$

$$x^\circ = 30^\circ.$$

Pertanto  $\hat{C} = 30^\circ$ ;  $\hat{B} = 60^\circ$ ;  $\hat{A} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

Verifica:  $90^\circ + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ , come volevasi dimostrare.

Obiettivo di questo esercizio è la risoluzione di un problema, una delle maggiori difficoltà incontrate dai ragazzi. Si richiede infatti l'attivazione dell'analisi sistematica, del comportamento comparativo e del pensiero inferenziale e strategico. Se emerge che una di queste funzioni cognitive è carente, la risoluzione dell'esercizio risulta compromessa. È a questo punto che l'insegnante mediatore deve rimuovere l'ostacolo, attraverso una forte mediazione e utilizzando specifici strumenti PAS.

Per programmare la lezione si tiene presente la carta cognitiva, strumento indispensabile per concettualizzare la relazione tra le caratteristiche di un compito e la prestazione fornita dal soggetto, in base a sette parametri che permettono di analizzare e interpretare la prestazione stessa.

Segue un esempio di carta cognitiva compilata.

1	Contenuto sul quale è centrato l'atto mentale.	<i>equazioni di 1° e 2° grado</i>
2	Modalità o linguaggio con cui viene espresso l'atto mentale.	<i>modalità operativa</i>
3	Fasi delle funzioni cognitive richieste dall'atto mentale.	
Input		<i>percezione, esplorazione sistematica, denominazione, relazioni temporali e spaziali, conservazione, costanza, permanenza dell'oggetto, utilizzo di più fonti di informazione, precisione</i>
Elaborazione		<i>analisi del disequilibrio, pertinenza, interiorizzazione, pianificazione, mantenimento, strutturazione, confronto e classificazione, pensiero ipotetico</i>
Output		<i>controllo dell'impulsività, auto-decentramento nella comunicazione, schematizzazione, chiarezza espositiva, superamento blocchi emotivi</i>
4	Operazioni cognitive richieste dall'atto mentale	<i>identificazione, confronto, analisi, classificazione, codificazione, differenziazione, pensiero ipotetico</i>
5	Livello di complessità	<i>medio</i>
6	Livello di astrazione	<i>medio/alto</i>
7	Livello di efficacia con il quale si compie l'atto mentale.	<i>rapporto tra rapidità e precisione, numero di errori compiuti, sforzo manifestato oggettivamente o percepito soggettivamente nel compiere l'atto mentale</i>

### 4.3. Progettazione della lezione di matematica

1. Obiettivo generale della lezione: *Risolvere le equazioni di 1° e di 2° grado*
2. Funzioni cognitive da sviluppare nel corso della lezione:
  - *Fase di input*: percezione, esplorazione sistematica, denominazione, relazioni temporali e spaziali, conservazione, costanza, permanenza dell'oggetto, utilizzazione di più fonti di informazione, precisione.
  - *Fase di elaborazione*: analisi del disequilibrio, pertinenza, interiorizzazione, pianificazione, mantenimento, strutturazione, confronto e classificazione, pensiero ipotetico.
  - *Fase di output*: controllo dell'impulsività, auto-decentramento nella comunicazione, schematizzazione, chiarezza espositiva, superamento blocchi emotivi.
3. Arricchimento del repertorio dei concetti, etichette e definizioni: terminologia settoriale (forma normale delle equazioni, equazione possibile, equazione impossibile).
4. Attività cognitive e operazioni da sviluppare nel corso della lezione: rappresentazione, confronto, simbolizzazione, codificazione, decodificazione, classificazione, ragionamento deduttivo, pensiero ipotetico.
5. Strategie cognitive da sviluppare nel corso della lezione: ricerca sistematica, restringimento del campo, ricerca di indizi.
6. Sviluppo del pensiero astratto: applicare un principio a una frase data, stabilire un modello generale del problema (usare simboli), ricercare analogie in altre aree, per esempio "Avere dei punti di riferimento facilita la risoluzione di un problema"; "Collocare ogni oggetto nel proprio contenitore mi permette di vedere più chiaramente le sue caratteristiche, la sua forma".  
Durante le nostre azioni, dobbiamo seguire delle regole, anche di fronte a elementi che sembrano già noti e che ci porterebbero ad agire "in automatico"; è importante prestare molta attenzione ai dettagli se non vogliamo sbagliare. In ogni discussione è necessario definire i termini che usiamo in modo che significhino la stessa cosa per tutti. In un insieme chiuso, gli elementi stessi e le relazioni tra di loro sono costanti; dividere oggetti in classi rende più facile la loro memorizzazione; la denominazione dell'insieme determina gli elementi che lo compongono.
7. Attività di *bridging*: "quando i piatti di una bilancia sono in equilibrio, il peso dei piatti è uguale; le differenze di ruolo sono evidenziate dalla divisa che si indossa; quando attraversiamo la strada usiamo delle regole; un direttore d'orchestra deve fare attenzione a tutti gli strumenti; in ogni discussione è necessario definire i termini che usiamo in modo che significhino la stessa cosa per tutti; si prepara una lista della spesa dividendo gli oggetti per categorie: latticini, frutta, verdure..."

#### 4.4. Strumenti PAS che accompagnano il percorso

Strumenti	Pagine
Organizzazione di Punti	1, 1 A, 1B, E2, 3, E3, 7
Orientamento spaziale 1	1, 3, 4, 5
Orientamento spaziale 2	1, 2
Classificazioni	1, 2, 3, 4
Confronti	10
Percezione analitica	1, 2

Il riferimento è alle “pagine”, cioè schede numerate progressivamente, degli Strumenti PAS Standard (Feuerstein, 1995).

Come è già stato sottolineato, prima di svolgere l’esercizio proposto, è necessario ripartire e ripercorrere insieme agli studenti l’argomento precedente, per verificare che sia stato interiorizzato. In questo caso specifico, durante la lezione precedente si è lavorato sulla presa di coscienza della differenza che intercorre tra la forma normale dell’equazione di 1° grado e dell’equazione di 2° grado e la relativa risoluzione. Solo dopo essersi accertati che gli studenti sono pronti, si procede con il passo successivo.

#### 4.5. Esercizio. Mettere in forma normale le seguenti equazioni:

$$2x(3x-2)=(x-2)^2$$

$$3+(x+1)(x-1)+2=(x+2)(x-3)+6$$

$$2x+(x+1)^2-x^2=1+(x+1)(x-1)-(x^2-1)$$

$$6x+9=8+6x-x+1$$

$$(x-2)^2+(x-1)(2x+1)+1=4x-1-3x^2$$

#### 4.6. Esercizio. Classifica, in base al grado, le equazioni precedenti

A titolo di esempio, si vede che risolvendo la prima e la seconda equazione si ottiene:

Colonna A	Colonna B
Equazioni di primo grado	Equazioni di secondo grado
$3+(x+1)(x-1)+2=(x+2)(x-3)+6$	$2x(3x-2)=(x-2)^2$
...	...

A questo punto, si procede a richiedere la risoluzione degli esercizi, conoscendo le formule risolutive di entrambi i casi. Utile è la raccolta di formule e definizioni in un quaderno apposito, sempre disponibile per la consultazione.

4.7. *Esercizio. Risolvere le equazioni della colonna A e della colonna B della tabella precedente*

Si tenga presente che:

- la forma normale di un'equazione di primo grado è  $ax=b$  da cui  $x=\frac{b}{a}$ ;
- la forma normale di un'equazione di secondo grado è  $ax^2+bx+c=0$  da cui

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Per cristallizzare i contenuti precedenti, si invitano gli studenti a svolgere i successivi esercizi per i quali si richiede appunto di:

- tradurli in forma normale
- classificare le equazioni (di 1° e di 2° grado)
- applicare le relative formule risolutive

4.8. *Esercizio. Risolvere le equazioni:*

1.  $3x-2 = 3(x-1)+4$
2.  $(8x-4)(x+2) = (2x-2)^2 + 18$
3.  $3(x^2+2x) = 6x + 4$
4.  $4 + 5x = 1-2x+8$
5.  $5(3-x) - x + 2 - 4(x+1) = 2(-5x+6) + 1$

Utile allo studio delle equazioni è stabilire se un'equazione è possibile o impossibile. Segue, quindi, un esercizio *ad hoc*. Questa analisi richiede che l'alunno abbia chiara la forma normale delle equazioni di 1° e 2° grado, le relazioni che devono intercorrere fra i coefficienti "a" e "b" nelle equazioni di 1° grado e il ruolo del discriminante nelle equazioni di 2° grado.

4.9. *Esercizio. Classifica, secondo i parametri possibile/impossibile, le equazioni precedenti*

Equazione possibile	Equazione impossibile
$(8x-4)(x+2) = (2x-2)^2 + 18$	$3x-2 = 3(x-1)+4$
$3(x^2+2x) = 6x + 4$	
$4+5x = 1-2x+8$	

Per cristallizzare i contenuti, si richiede di:

- scrivere un'equazione di 1° grado in forma normale
- scrivere un'equazione di 2° grado in forma normale



## 5. Secondo esempio

### 5.1. Tabella di matematica per la raccolta dati utili alla risoluzione di espressioni, equazioni etc.

Scopo della tabella è aiutare l'allievo nella lettura di una semplice espressione: l'interpretazione errata di una regola di calcolo compromette infatti l'esito dell'esercizio. Spesso ciò è dovuto ad un atteggiamento impulsivo e superficiale che impedisce di cogliere le relazioni e i livelli che intercorrono tra gli elementi dell'espressione. È indispensabile che l'alunno tenga conto della gerarchia fra operazioni che, solitamente, viene sottovalutata. È importante che l'allievo riconosca la tipologia dell'esercizio e utilizzi le etichette specifiche: binomio, equazioni, disequazioni, polinomi...

### 5.2. Esercizio. Risolvere $[(-10)2 + (-10)] : (-3)2 - [(-10)2 - (-10)] : (-11)$

Cos'è? (tipologia esercizio)	Con quali elementi? (lettura/riconoscimento elementi)	Come si fa? (sequenza sistematica, dei passaggi utili alla risoluzione)
Un'espressione.	Vi compaiono: numeri relativi; operazioni di potenza, divisione, addizione algebrica. Vi sono inoltre parentesi quadre.	Si calcolano le potenze, si lavora sulle parentesi quadre, si fanno le divisioni e quindi l'addizione algebrica.

### 5.3. Trova e motiva l'errore (rinforzo dei contenuti).

Gli esercizi seguenti sono svolti in modo non corretto. Da un'attenta analisi dei contenuti, determina il tipo di errore.

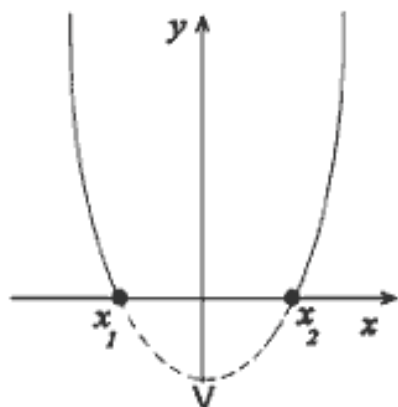
#### Risolvi le seguenti disequazioni:

$$1) \quad 5x - 4x^2 > 0$$

Risolvere la disequazione equivale andare a risolvere il seguente sistema misto:

$$\begin{cases} y = 5x - 4x^2 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 > 0$$



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 5}{-8} = \begin{cases} x_1 = \frac{-5+5}{-8} = 0 \\ x_2 = \frac{-5-5}{-8} = \frac{-10}{-8} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$s = \left\{ \forall x \in \mathcal{R} \mid x < 0 \cup x > \frac{5}{4} \right\}$$

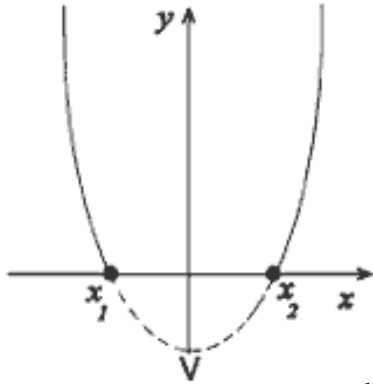
Lo studente deve essere in grado di riconoscere i coefficienti **a**, **b** e **c** che compaiono nella forma normale e, a seconda che il coefficiente **a** sia  $> 0$  o  $< 0$ , tracciare il giusto disegno della parabola. Nel nostro caso **a**  $< 0$  (-1), quindi la concavità della parabola è rivolta verso il basso.

$$2) \quad x^2 - 4x + 3 > 0$$

Risolvere la disequazione equivale andare a risolvere il seguente sistema misto:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 > 0$$



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$$

L'errore consiste nel fatto che l'esercizio non è terminato: i valori trovati sono gli zeri dell'equazione associata e non le soluzioni della disequazione.

3)

Risolvi il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

a)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (x + y)^2 - 2xy = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 4 - 2xy = 2 \end{cases} \text{ semplificando per 2 la seconda equazione,}$$

si ottiene:

c)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2 - xy = 1 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x = 1 - y \end{cases} \text{***}$$

f)

$$\begin{cases} y - 1 + y = 2 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \mathcal{S} = \left( \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right)$$

L'errore (evidenziato con \*\*\* nel passaggio e) dipende da superficialità o da conoscenze non interiorizzate.

## 6. Risultati

Il metodo di ricerca empirica utilizzato per il rilevamento dei dati ha seguito le indicazioni per l'osservazione degli obiettivi nelle classi di matematica di Goodchild (2002). In base a tale metodologia, dalle osservazioni emergono le seguenti indicazioni: dopo avere seguito il percorso sopra descritto, i ragazzi sono più precisi, si soffermano sulla consegna, individuano le strategie da seguire, osservano e descrivono per pianificare il compito. Il loro pensiero, nel percorso di pianificazione, diviene più elastico e critico. Riescono a svolgere operazioni di analisi per semplificarsi il compito e per meglio affrontarlo; in questo modo, riescono a tenere sotto controllo il procedimento. Per verificare se il compito è stato svolto correttamente, confrontano utilizzando parametri, imparano nuovi termini, arricchiscono il loro vocabolario e acquisiscono un linguaggio settoriale più corretto e preciso. Iniziano ad autocorreggersi, a riconoscere l'errore e ad attivare spontaneamente il processo metacognitivo. Acquisiscono gradualmente una maggiore sicurezza, che va ad alimentare l'autostima e l'orgoglio personale.

## 7. Altre considerazioni

Operare in questo modo significa trasformare l'insegnamento da una sterile trasmissione di saperi a un'energica e consapevole costruzione di saperi e di processi di apprendimento attraverso l'insegnante mediatore e facilitatore. Ciò ha contribuito a migliorare la professionalità delle docenti e ha permesso di instaurare con gli allievi un rapporto di fiducia e di comprensione reciproca.

## Conclusioni

Il metodo, in questo caso applicato alla matematica, può essere utilizzato anche nel lavoro su altre discipline. Si auspica dunque la trasformazione del consiglio di classe in un team di docenti esperti mediatori che facilitino l'apprendimento degli studenti, condividendone il percorso. Si possono individuare indicatori cognitivi sui quali ogni insegnante si focalizzerà nella propria disciplina. L'intervento risulterebbe tanto più efficace quanto più tutti i docenti riuscissero a lavorare sugli stessi indicatori.

## Riferimenti bibliografici

- Feuerstein, R. (1995). *Strumenti PAS Standard: Organizzazione di Punti, Orientamento spaziale 1, Orientamento spaziale 2, Classificazioni, Confronti, Percezione analitica, Immagini*. Jerusalem: Hadassah-WZO-Canada-Research Institute.
- Feuerstein, R., Feuerstein, R. S., Falik, L. Rand, Y. (2008). *Il programma di Arricchimento Strumentale. Fondamenti teorici e applicazioni pratiche*. Trento: Erickson.
- Goodchild, S. (2002). Exploring Students' Goals in Classroom Activity. In Goodchild, S., English, L. (2002). *Researching Mathematics Classrooms: A Critical Examination of Methodology* (pp. 39-66). Westport CT: Praeger.
- Hoffmann, M. H. G., Lenhard, J., Seeger, F. (2005). *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education*. New York, NY: Springer.
- Minuto, M., Ravizza, R. (2008). *Migliorare i processi di apprendimento. Il Metodo Feuerstein: dagli aspetti teorici alla vita quotidiana*. Trento: Erickson.

- Ping Xin, Y. (2012). *Conceptual Model-Based Problem Solving: Teach Students with Learning Difficulties to Solve Math Problems*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Ryan, J., Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15: Learning from Errors and Misconceptions*. Maidenhead, EN: McGraw-Hill-Open University Press.
- Schoenfeld, A. H. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, NJ: Lawrence, Erlbaum Associates.

