

## La formazione dei futuri insegnanti di matematica: valutare la conoscenza pedagogica della disciplina

### The education of future mathematics teachers: evaluating pedagogical knowledge of content

Federica Ferretti

Faculty of Education Sciences • University of Bolzano (Italy) • federica.ferretti@unibz.it

Andrea Maffia

Department of Mathematics "F. Casorati" • University of Pavia (Italy) • andrea.maffia@unipt.it

Classes about mathematics education within the degree in "Scienze della Formazione Primaria" must work both on the content knowledge and the pedagogical knowledge of content. Possible strategies to evaluate content knowledge have been deep studied in the past. It seems more difficult to find suitable data about the pedagogical knowledge of content. In this contribution we present a task that is aimed at evaluating this aspect of future teachers' knowledge. Through an a priori analysis and a first exploratory analysis of answers, we question the content validity of the task. We conclude that the task is coherent with the model of mathematical knowledge for teaching by Ball and colleagues, but there are still some critical issues requiring a modification if we want to guarantee the content validity of the task.

**Keywords:** content knowledge; evaluation; mathematics; pedagogical knowledge; scienze della formazione primaria; tasks

I corsi relativi alle didattiche disciplinari all'interno dei corsi di laurea in Scienze della Formazione Primaria devono necessariamente lavorare sia sulla conoscenza disciplinare, sia sulla conoscenza pedagogica del contenuto. Le modalità per valutare la conoscenza della disciplina sono state studiate approfonditamente; appare più difficile trovare dati rilevanti sulla conoscenza pedagogica del contenuto. In questo contributo si propone una consegna volta a valutare questo aspetto della conoscenza dei futuri insegnanti. Attraverso un'analisi a priori e una prima analisi esplorativa di alcune risposte da parte dei corsisti, ci si interroga sulla validità di contenuto. Si conclude che la consegna si attiene al modello teorico della conoscenza della matematica dell'insegnamento di Ball e colleghi, sebbene siano presenti delle criticità su cui occorrerà intervenire per garantire la validità della consegna.

**Parole chiave:** conoscenza del contenuto; conoscenza pedagogica; consegne; matematica; scienze della formazione primaria; valutazione

**Il contributo nasce in comune accordo tra il Maffia e Ferretti. I §§ 5 e 6 sono attribuibili in ugual misura ad entrambi gli autori; i §§ 2 e 4 sono attribuibili a Ferretti e i §§ 3 e 5 a Maffia.**



291

Esperienze



# La formazione dei futuri insegnanti di matematica: valutare la conoscenza pedagogica della disciplina

## 1. Introduzione



I corsi di laurea in Scienze della Formazione Primaria sono stati e continuano a essere veri e propri laboratori di incontro e messa in pratica delle diverse didattiche, quelle disciplinari e la didattica generale. Il rapporto tra i diversi saperi è stato oggetto di un nutrito dibattito in pedagogia (D'Amore, Frabboni, 1996; De Santis, Bianchi, 2017; Depaepe, Verschaffel, Kelchtermans, 2013; Gardner, 1999; Martini, 2001; Nigris, 2012). La necessità di realizzare corsi per i futuri insegnanti di scuola primaria, insieme alla richiesta da parte dei corsisti di accedere a un insieme di saperi coerente e non frammentato, ha condotto i docenti universitari a trovare punti d'incontro e modalità di lavoro condivise. L'esperienza degli autori del presente contributo è quella di una fruttuosa collaborazione che, negli anni, ha avviato un processo di riflessione sui corsi tenuti presso due differenti sedi universitarie: quella dell'Alma Mater Studiorum di Bologna e quella della Libera Università di Bolzano.

Si è lavorato alla progettazione di corsi di Fondamenti e Didattica della Matematica in cui, anche per via del rapporto non sempre positivo dei futuri insegnanti con la disciplina (Coppola et al., 2012; Di Martino et al., 2013), vi è una continua tensione tra la richiesta dei corsisti di focalizzare maggiormente l'attenzione sulle metodologie didattiche e la sensazione dei docenti che le conoscenze matematiche debbano essere ancora approfondite. Nell'organizzare i contenuti dei corsi, si fa riferimento al modello di Shulman (1986) per il quale è possibile descrivere la conoscenza necessaria agli insegnanti individuando due componenti tra loro fortemente interconnesse: la *Conoscenza della disciplina* (Subject Matter Knowledge) e la *Conoscenza pedagogica del contenuto* (Pedagogical Content Knowledge). La conoscenza disciplinare è data dall'insieme degli oggetti e discorsi tipici della disciplina; "conoscenza disciplinare significa certamente conoscenza ampia e approfondita dei contenuti di una disciplina, ma anche conoscenza della sua epistemologia cioè dei nuclei concettuali fondamentali, del linguaggio, dell'approccio metodologico con cui la disciplina conosce la realtà e conferisce al mondo un significato specifico" (Falcinelli, 2007, p.13). Si assume che la conoscenza disciplinare non sia sufficiente per la for-

mazione dell'insegnante, ovvero che "le conoscenze dei contenuti della disciplina sono sicuramente centrali nell'insegnamento-apprendimento della matematica, ma, come già sottolineato da Shulman (1986), per un insegnante la conoscenza dei contenuti si intreccia con le conoscenze pedagogiche che sono fondamentali nella progettazione, sviluppo e valutazione delle attività in classe" (Martignone, 2016, p. 84). Le modalità per promuovere e valutare la conoscenza della disciplina sono state nel tempo studiate sempre più approfonditamente; sembra invece più difficile trovare dati rilevanti sulla formazione della conoscenza pedagogica del contenuto disciplinare.

Lo scopo di questo contributo è quello di analizzare una possibile tipologia di consegna volta a valutare (nelle diverse accezioni che la valutazione può avere) la *Conoscenza pedagogica del contenuto* matematico degli studenti di Scienze della Formazione Primaria. Il quadro teorico della *Conoscenza della matematica per l'insegnamento* (presentato nella prossima sezione) servirà a definire meglio i principi che stanno alla base della progettazione delle consegne, ovvero il modo in cui se ne valuta la validità di contenuto.

Presenteremo un esempio di consegna e uno studio esplorativo su di essa in cui analizziamo le risposte fornite dagli studenti per interrogarci sulla sua validità.

## 2. Conoscenza della matematica per l'insegnamento

L'importanza del sapere disciplinare degli insegnanti che si occupano di una determinata disciplina è riconosciuta a livello internazionale; già a partire dalla metà degli anni '80, Shulman e colleghi (1986) focalizzarono l'attenzione sulla conoscenza disciplinare per l'insegnamento e proposero un modello volto a delineare gli ambiti di conoscenza per l'insegnamento della matematica, in termini di *Conoscenza pedagogica del contenuto*. La vera innovazione fu la denotazione di una "nuova" conoscenza del contenuto, specifica per l'insegnamento. Shulman (1987) delineò alcune categorie per caratterizzare la conoscenza professionale per l'insegnamento: la *Conoscenza pedagogica generale*, la *Conoscenza degli studenti*, la *Conoscenza del contesto*, la *Conoscenza degli obiettivi educativi*, la *Conoscenza dei contenuti*, la *Conoscenza del curriculum* e la *Conoscenza pedagogica del contenuto*. Nonostante Shulman stesso abbia chiarito che l'enfasi posta sulle dimensioni della conoscenza dei contenuti non fosse intesa a minimizzare l'importanza delle conoscenze e delle abilità pedagogiche, questo quadro ebbe un notevole impatto a livello internazionale, accendendo un dibattito sulla rilevanza della conoscenza disciplinare degli insegnanti.



Per indagare la conoscenza degli insegnanti, Ball, Thames e Phelps (2008) si focalizzano su approcci empirici alla comprensione dei contenuti matematici necessari all'insegnamento, indagandone la natura, il ruolo e la rilevanza.

Questi studi, oltre a contribuire al perfezionamento del costrutto di *Conoscenza pedagogica del contenuto* (identificandone sottodomini), hanno altresì permesso un inquadramento della concettualizzazione delle conoscenze e delle abilità matematiche necessarie per l'insegnamento: la cosiddetta *Conoscenza specialistica del contenuto* (Fig.1).

Ball, Thames e Phelps (2008), descrivendo la *Conoscenza disciplinare* (Subject Matter Knowledge) matematica necessaria per l'insegnamento, hanno identificato tre campi:

*Conoscenza comune del contenuto* (Common Content Knowledge) definita come l'insieme della abilità e delle conoscenze matematiche utilizzate in situazioni diverse dalle pratiche d'insegnamento. Con "comune" non si intende una conoscenza che hanno "tutti", ma conoscenze matematiche che non sono strettamente legate al processo di insegnamento e che quindi posseggono anche altri professionisti.

*Conoscenza specialistica del contenuto* (Specialized Content Knowledge) è l'insieme delle conoscenze e delle abilità disciplinari proprie dell'attività d'insegnamento. Per poter insegnare un determinato contenuto occorre una conoscenza che vada oltre al contenuto stesso; è necessario avere una buona padronanza del processo di apprendimento che guida verso la comprensione di tale contenuto.

*Conoscenza in prospettiva del contenuto* (Horizon Content Knowledge) è la consapevolezza di come i contenuti matematici sono correlati tra loro nei curricula scolastici (Ball, 1993). La conoscenza degli argomenti trattati nei gradi scolastici successivi e del diverso modo di affrontare i contenuti in diversi livelli scolari fornisce informazioni decisive per la progettazione didattica.

Ball, Thames e Phelps (2008) non si limitano a dettagliare gli ambiti della conoscenza disciplinare: inseriscono la *Conoscenza del curriculum* (Knowledge of Content and Curriculum) all'interno della *Conoscenza pedagogica del contenuto*, insieme ad altri due ambiti: la *Conoscenza del contenuto e degli studenti* (Knowledge of Content and Students) e la *Conoscenza del contenuto e dell'insegnamento* (Knowledge of Content and Teaching).



## Ambiti della *Conoscenza Matematica per l'Insegnamento*

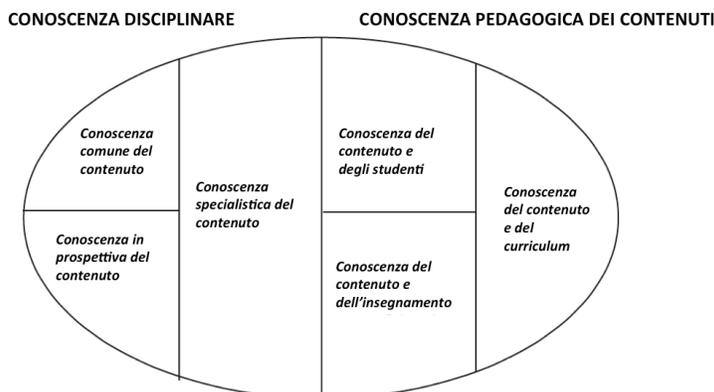


Fig. 1. Ambiti della *Conoscenza Matematica per l'Insegnamento* (Ball, Thames & Phelps, 2008)

La *Conoscenza del curriculum* riguarda l'insieme delle indicazioni, dei programmi e dei materiali che ad essi fanno riferimento (Shulman, 1986). Possono essere considerati tra questi materiali anche testi alternativi, software, immagini, video nonché i libri di testo degli studenti (ibidem). La *Conoscenza del contenuto e degli studenti* consiste nell'insieme delle conoscenze che supportano l'abilità di individuare e prevedere le principali difficoltà che gli studenti potrebbero incontrare durante il processo di apprendimento di un contenuto matematico;

per esempio, il modo in cui gli studenti apprendono solitamente ad addizionare le frazioni e gli errori o misconcezioni che comunemente emergono durante questo processo. Nell'insegnare agli studenti la somma di frazioni, un insegnante dovrebbe essere consapevole che gli studenti, che spesso incontrano difficoltà con la natura moltiplicativa delle frazioni, potrebbero probabilmente sommare i numeratori e i denominatori delle due frazioni<sup>1</sup> (Hill, Ball, Schilling, 2008, p. 375).

La *Conoscenza del contenuto e dell'insegnamento* mette in relazione la conoscenza matematica con la conoscenza dell'insegnamento, combinazione determinante sia in fase di progettazione sia per quanto riguarda le pratiche d'aula. Questa conoscenza influisce sulla scelta delle rappresentazioni, delle metodologie, degli esempi e sull'identificazione di strategie didattiche opportune.

<sup>1</sup> Trad. it. a cura degli autori.



Un esempio di [Conoscenza del contenuto e dell'insegnamento] potrebbe essere la conoscenza di diversi modelli utilizzabili per l'insegnamento del valore posizionale, sapendo quello che ciascun modello può mostrare a proposito dell'algoritmo di sottrazione e sapendo come utilizzarli efficacemente<sup>2</sup> (Ball, Thames, Phelps, 2008, p. 402).

Ognuna di queste conoscenze richiede interazioni continue tra la matematica intesa come disciplina e le conoscenze pedagogiche sull'apprendimento degli studenti.

Nei corsi universitari attuali sembrano ancora mancare elementi per valutare la *Conoscenza pedagogica del contenuto*; come docenti di corsi di Fondamenti e Didattica della Matematica ci si è posti l'obiettivo di progettare delle consegne che permettano di osservare e riconoscere la *Conoscenza pedagogica del contenuto* mobilitata dagli studenti universitari durante e al termine dei corsi.

In questo lavoro analizziamo delle consegne che vogliono indagare tutti e tre i sotto-ambiti della conoscenza pedagogica della matematica degli studenti di Scienze della Formazione Primaria, ovvero valide dal punto di vista del contenuto.

### 3. Metodologia

La consegna che analizzeremo è riportata nella sua interezza in figura 2. Questa consegna è stata somministrata agli studenti dei Corsi di Laurea a ciclo Unico Magistrale in Scienze della Formazione Primaria della Scuola di Psicologia e Scienze della Formazione Primaria dell'Alma Mater Studiorum – Università di Bologna e della Facoltà di Scienze della Formazione della Libera Università di Bolzano nell'anno accademico 2017/18<sup>3</sup>.

Come si può vedere in figura 2, la consegna è composta da uno stimolo comune e tre richieste distinte. Lo stimolo riporta la soluzione di una situazione problematica da parte di due studenti di Scuola Primaria. La situazione problematica non differisce da quelle presenti nella maggior parte dei libri scolastici per la Scuola Primaria; è stata scelta

2 Trad. it. a cura degli autori.

3 Il quesito è stato somministrato agli studenti del terzo anno del Corso di Laurea in Scienze della Formazione primaria all'interno del corso di "Fondamenti di Matematica e Didattica della Matematica" all'Università di Bologna e del secondo anno dell'analogo Corso di Laurea della Libera Università di Bolzano – Campus di Bressanone, all'interno del corso di "Fondamenti e Didattica della Matematica 1".

perché, per ottenere una soluzione corretta, è possibile percorrere diverse strategie risolutive. Nello stimolo della consegna ne sono presentate due (una svolta dallo studente A e una dallo studente B). Lo studente A calcola il numero totale di posti in una sala ricorrendo alla proprietà associativa della moltiplicazione, svolgendo così il calcolo “in riga”. Successivamente effettua una moltiplicazione “in colonna” per determinare il numero di posti dell’altra sala e, infine, somma i due numeri ottenuti. Nello svolgimento del calcolo “in colonna” è presente un errore nel posizionamento delle cifre all’interno dello schema procedurale dell’algoritmo. Lo studente B rappresenta graficamente la situazione mediante due schieramenti e successivamente esplicita il calcolo eseguito: somma il numero di file di ciascuna sala e poi moltiplica il numero ottenuto per il numero di posti di ogni fila (che è uguale nelle due sale). In questo secondo caso il risultato ottenuto è quello corretto.

A degli studenti di quarta primaria viene proposto il seguente problema:

*Un cinema ha due sale. Nella prima sala ci sono 15 file da 20 posti ciascuna; nella seconda sala le file sono 18 e contengono sempre 20 posti ciascuna. Quante persone possono sedersi nel cinema?*

Di seguito sono mostrati i protocolli relativi alle procedure risolutive di due studenti.

<p>Io ho calcolato prima i posti in una sala facendo <math>15 \times 20 = 15 \times 2 \times 10</math> che fa 300. Poi ho trovato che nella seconda sala ci sono <math>18 \times 20</math> posti</p> $\begin{array}{r} 20 \times \\ 18 = \\ \hline 160 \\ 20 \\ \hline 180 \end{array}$ <p>Allora ho capito che nel cinema si possono sedere 480 persone.</p>	<p>Per risolvere il problema ho fatto un disegno</p> <p>Poi ho calcolato <math>15 + 18</math> che fa 33 e poi ho fatto <math>20 \times 33</math> che fa 660.</p>
Soluzione studente A	Soluzione studente B

1. Si individuino:
  - a. le conoscenze matematiche coinvolte nella soluzione del problema;
  - b. le eventuali difficoltà incontrate dai due studenti nell’interpretazione del testo del problema e nella sua soluzione.
2. Si indichi una possibile prosecuzione del lavoro con i singoli studenti o con l’intera classe a partire dall’analisi effettuata.

**Fig. 2. Testo della consegna proposta**

Lo stimolo è seguito da tre richieste volte a indagare la *Conoscenza pedagogica del contenuto*. La valutazione della validità di contenuto della consegna verrà svolta in due fasi. Una prima analisi a priori è stata portata avanti da entrambi gli autori, facendo riferimento al quadro teorico esposto nella sezione precedente; ovvero, si identifica la relazione che intercorre tra ciascuna delle richieste e i tre sotto-ambiti del costrutto.

Successivamente, è stato condotto uno studio esplorativo (pilot study) volto a utilizzare le risposte dei corsisti come indizi ulteriori sulla validità di contenuto della consegna proposta. In questo modo, in una sorta di processo di triangolazione, questa prima analisi qualitativa dell'impatto della consegna fornisce un feedback che, unito all'analisi a priori, permette di trarre delle prime conclusioni sulla validità di contenuto della consegna.



#### 4. Analisi a priori della consegna

La prima richiesta (1a, Fig. 2) è quella di esplicitare le conoscenze matematiche che entrano in gioco nella risoluzione della situazione problematica. Lo scopo di questa richiesta è quello di indagare la conoscenza dei contenuti matematici, eventualmente in relazione al curriculum. Dato che durante le lezioni svolte per entrambi i corsi si è approfondito lo studio delle conoscenze e competenze matematiche, anche in relazione agli Obiettivi di apprendimento e ai Traguardi per lo sviluppo delle competenze delle Indicazioni Nazionali per il curriculum della Scuola dell'Infanzia e del primo ciclo di istruzione (MIUR, 2012), ci si aspetta che nella risposta, individuati i contenuti matematici coinvolti, si faccia esplicito riferimento alla normativa ministeriale. Questo primo stimolo indaga la *Conoscenza del contenuto e del curriculum* nel senso di Ball e colleghi (2008).

La seconda richiesta (1b, Fig. 2) sollecita l'individuazione di eventuali difficoltà che possono incontrare gli studenti nell'interpretazione del testo e nella risoluzione del problema. Questa richiesta indaga quindi la *Conoscenza del contenuto e degli studenti* (Ball, Thames, Phelps, 2008), in quanto per rispondere è necessario conoscere i processi di apprendimento in relazione ai contenuti matematici.

L'ultima consegna è strettamente dipendente dalle precedenti; viene richiesto di ipotizzare un possibile proseguimento delle attività d'aula a partire dall'analisi della situazione proposta nello stimolo. Tale richiesta è effettuata o a livello di classe o a livello individuale. Le risposte dovrebbero contenere un riferimento alla progettazione didattica relativa ai contenuti matematici coinvolti e un uso formativo delle difficoltà

individuate; in questo senso viene indagata quella che Ball, Thames e Phelps (2008) denominano *Conoscenza del contenuto e dell'insegnamento*.

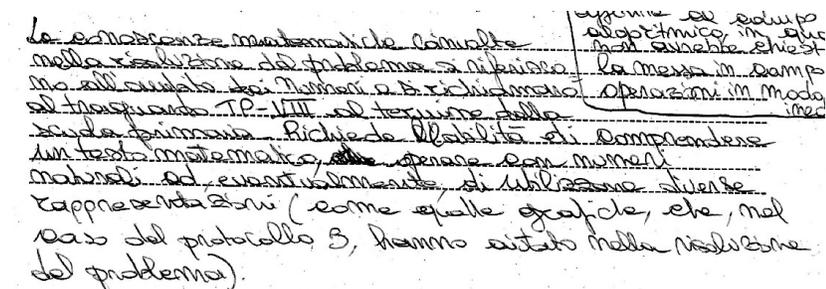
La consegna presenta quindi validità di contenuto dato che tutti e tre i sotto-ambiti del quadro teorico sono rappresentati.

## 5. Analisi dei protocolli

In questa sezione sono riportati alcuni protocolli che fungono da esempi paradigmatici relativi ai diversi sotto-ambiti della *Conoscenza pedagogica del contenuto*. Si analizza ciascun protocollo facendo riferimento al quadro teorico e specificando, caso per caso, quale ambito della conoscenza emerge prevalentemente.

Il protocollo P\_1 (Fig. 3) mostra la risposta di uno studente alla richiesta 1a:

Le conoscenze matematiche coinvolte nella risoluzione del problema si riferiscono all'ambito dei Numeri e si richiamano al traguardo TP-VIII [Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria] al termine della scuola primaria. Richiede abilità di comprendere un testo matematico, operare con numeri naturali ed eventualmente utilizzare diverse rappresentazioni (come quelle grafiche, che, nel caso del protocollo B, hanno aiutato nella risoluzione del problema).



Le conoscenze matematiche coinvolte nella risoluzione del problema si riferiscono all'ambito dei Numeri e si richiamano al traguardo TP-VIII al termine della scuola primaria. Richiede l'abilità di comprendere un testo matematico, operare con numeri naturali ed eventualmente utilizzare diverse rappresentazioni (come quelle grafiche, che, nel caso del protocollo B, hanno aiutato nella risoluzione del problema).

esprimere ed elaborare  
adattativo in que-  
non sarebbe strett  
La messa in campo  
operazioni in modo  
immediato

Fig. 3. Protocollo P\_1 - Conoscenza del contenuto e del curriculum

Nella risposta si può notare il riferimento esplicito agli ambiti di contenuto e ai Traguardi per lo Sviluppo delle Competenze da raggiungere al termine della Scuola Primaria<sup>4</sup> (MIUR, 2012). Questo riferi-

4 Nella risposta lo studente fa riferimento alla sigla corrispondente nell'indicizzazione delle Indicazioni Nazionali per il curricolo della Scuola dell'Infanzia e del

mento viene interpretato come un'evidenza della *Conoscenza del contenuto e del curriculum*; il corsista mette in relazione la consegna con la sua conoscenza delle indicazioni curriculari relative al grado scolare a cui ci si riferisce.

In generale, questo tipo di risposta non è frequente; nella maggior parte dei casi viene fatto riferimento alle conoscenze e ai contenuti matematici senza un diretto richiamo alle indicazioni curriculari o a un'eventuale progettazione didattica esplicitata in termini di curriculum scolastico.

Nella figura seguente viene riportata una risposta (fig. 4, protocollo P\_2) alla richiesta 1b:



Le difficoltà incontrate dallo studente A riguarda[no] il calcolo in colonna; per la prima sala ha utilizzato un approccio relazionale e ha trovato il risultato utilizzando il calcolo mentale grazie alla proprietà distributiva, ha sbagliato però il secondo calcolo in colonna e non ha ragionato sui risultati perché intuitivamente poteva capire che il risultato della seconda moltiplicazione doveva essere più grande del primo in quanto il numero delle file era maggiore. Il secondo studente poteva incorrere in una difficoltà di trasformazione di conversione da una rappresentazione ad un'altra in diversi registri semiotici.

In questa risposta si riscontrano evidenze della *Conoscenza del contenuto e degli studenti*: viene messo in luce l'errore dello studente A e possibili controlli da attuare al fine di migliorare la padronanza della situazione ed evitare di incorrere in errori come quello evidenziato. Per quanto riguarda il secondo studente (studente B), vengono utilizzati, per prevedere possibili difficoltà, elementi teorici di Didattica della Matematica affrontati a lezione: la gestione delle diverse rappresentazioni semiotiche nel senso di Duval (1993). Tutto questo viene esplicitato nonostante la *Conoscenza specifica del contenuto* difetti, in quanto viene confusa la proprietà associativa con quella distributiva.

primo ciclo di istruzione per quanto riguarda la matematica utilizzata durante i corsi e disponibile agli studenti durante il lavoro. In particolare, la sigla TP indica che si tratta di Traguardi per lo Sviluppo delle Competenze da raggiungere al termine della Scuola Primaria e VIII indica che si tratta dell'ottavo Traguardo nell'ordine in cui sono presenti nel testo delle Indicazioni Nazionali per il curriculum della Scuola dell'Infanzia e del primo ciclo di istruzione.

Le ~~due~~ difficoltà incontrate dallo studente A riguarda il calcolo in colonna; per la prima sala ha utilizzato un approccio relazionale e ha trovato il risultato utilizzando il calcolo mentale grazie alla proprietà distributiva, ha sbagliato però il secondo calcolo in colonna e non ha ragionato sui risultati poiché intuitivamente poteva capire che il risultato della seconda moltiplicazione doveva essere più grande del primo in quanto il numero delle file era maggiore. Il secondo studente poteva incontrare ~~anche~~ in una difficoltà di trasformazione di conversione da una rappresentazione ad un'altra in diversi registri semiotici.

Fig. 4. Protocollo P\_2 – Conoscenza del contenuto e degli studenti

Nella figura 5 viene mostrata un'altra risposta (Protocollo P\_3) al quesito 1b:

Il primo studente mostra di aver compreso come approcciarsi al problema per poterlo risolvere, ma commette un errore nel momento in cui svolge l'operazione di moltiplicazione; non inserisce lo 0 prima di svolgere la moltiplicazione tra 1 e 20. Di conseguenza l'incolonnamento è sbagliato ed anche il risultato. Dimostra anche di aver compreso le proprietà della moltiplicazione in quanto si semplifica i calcoli facendo  $15 \times 20$  come  $15 \times 2 \times 10$ . Il secondo studente, come il primo, ha ben interpretato il testo e si è aiutato con il disegno per fare la moltiplicazione sfruttando la proprietà associativa.



Il primo studente mostra di aver compreso come approcciarsi al problema per poterlo risolvere, ma commette un errore nel momento in cui svolge l'operazione di moltiplicazione; non inserisce lo 0 prima di svolgere la moltiplicazione tra 1 e 20. Di conseguenza l'incolonnamento è sbagliato ed anche il risultato. Dimostra anche di aver compreso le proprietà della moltiplicazione in quanto si semplifica i calcoli facendo  $15 \times 20$  come  $15 \times 2 \times 10$ . Il secondo studente, come il primo, ha ben interpretato il testo e si è aiutato con il disegno per fare la moltiplicazione sfruttando la proprietà associativa.

Fig. 5. Protocollo P\_3 – Conoscenza del contenuto e degli studenti

Nella risposta viene individuato l'errore commesso dallo studente A all'interno della procedura eseguita; inoltre, è notata la padronanza nell'utilizzo delle proprietà della moltiplicazione (sebbene, nell'analisi del procedimento dello studente B non vengano denominate correttamente). La *Conoscenza specifica del contenuto* è messa in gioco per interpretare la difficoltà dello studente A. Si può quindi affermare che anche in questo protocollo viene messa in evidenza la *Conoscenza del contenuto e degli studenti*. Questo tipo di risposta si è rivelato piuttosto comune all'interno del campione. Molti corsisti individuano possibili difficoltà degli studenti interpretando eventualmente in modo diffe-

rente le possibili cause dell'errore rilevato e/o le ragioni che possono motivare la scelta di una determinata strategia risolutiva.

Come si nota nelle figure riportate di seguito (Fig. 6 e Fig. 7), i protocolli P\_4 e P\_5 si riferiscono alla *Conoscenza del contenuto e dell'insegnamento*.

Protocollo P\_4 (Fig. 6):

Una possibile prosecuzione del lavoro potrebbe coinvolgere l'intera classe nell'approfondimento della proprietà distributiva, ad esempio a partire dalla soluzione al problema individuata dal secondo alunno. Infatti, pur non esplicitando la definizione della proprietà, è importante che gli alunni possano utilizzarla nella pratica. Il lavoro potrebbe iniziare mostrando il disegno dell'alunno, come esempio della proprietà distributiva usando il modello rettangolare della moltiplicazione. Sarebbe utile, successivamente, dimostrare la validità della proprietà anche con il modello della somma ripetuta, il quale potrebbe risultare più convincente agli occhi di alcuni alunni.



Protocollo P\_5 (Fig.7)

A partire dall'analisi effettuata si può procedere mostrando all'intera classe il compito e le due risoluzioni, facendo vedere loro che è possibile risolverlo con le proprietà della moltiplicazione, come nel primo caso, oppure aiutandosi graficamente come nel secondo caso. Bisogna però fare attenzione ai calcoli. È importante favorire la cooperazione tra gli alunni affinché essi possano trovare l'errore del I° studente e discuterne insieme, in modo da poter passare dalla zona di sviluppo effettiva a quella potenziale. In questo modo l'alunno può pian piano comprendere concetti ed utilizzarli per risolvere problemi ed esercizi che prima da solo non avrebbe saputo fare.

Una possibile prosecuzione del lavoro potrebbe coinvolgere l'intera classe nell'approfondimento della proprietà distributiva, ad esempio a partire dalla seconda soluzione al problema individuata dal secondo alunno. Infatti, pur non esplicitando la definizione della proprietà è importante che gli alunni possano utilizzarla nella pratica. Il lavoro potrebbe iniziare mostrando il disegno dell'alunno, come esempio della proprietà distributiva usando il modello rettangolare della moltiplicazione. Sarebbe utile, successivamente, dimostrare la validità della proprietà anche con il modello della somma ripetuta il quale potrebbe risultare più convincente agli occhi di alcuni alunni.

Fig. 6. Protocollo P\_4 – Conoscenza del contenuto e dell'insegnamento

A partire dall'analisi è effettuato il più proceduto mostrando all'inizio, elargendo il esempio, le due risoluzioni, facendo vedere come esse si possa bene risolverlo con le proprietà della moltiplicazione, come nel primo caso, oppure aiutandosi gradualmente con le secondo caso bisogna però fare attenzione ai calcoli. È importante favorire la ~~cooperativa~~ cooperazione tra gli alunni affinché essi possano trovare e trovare il modo. Lo studente è direttamente indotto al modo di poter passare dalla zona di sviluppo effettiva a quella potenziale, in questo modo l'alunno può piano piano comprendere concetti ~~che sono~~ ed utilizzarli per risolvere problemi ed esercizi che prima da solo non avrebbe saputo fare.

Fig. 7. Protocollo P\_5 – Conoscenza del contenuto e dell'insegnamento

In entrambi i protocolli (P\_4 e P\_5) vengono esplicitate delle metodologie di lavoro che nascono dall'esigenza di far superare le difficoltà evidenziate nelle risoluzioni del problema. Nel primo protocollo viene delineata una sorta di sequenza didattica centrata sul contenuto matematico "proprietà distributiva". Nel secondo protocollo vi è un richiamo a conoscenze pedagogiche messe in relazione con i contenuti matematici. È esplicito il riferimento alla Teoria della zona di sviluppo prossimale di Vygotskij (1980) che viene applicata al particolare caso dell'apprendimento dell'algoritmo per svolgere la moltiplicazione. Tale teoria è affrontata in più di un corso all'interno del piano di studi in Scienze della Formazione Primaria; si ha quindi un'evidenza del modo in cui le conoscenze pedagogiche approfondite in corsi di didattica generale possano essere impiegate per la didattica disciplinare. Non si tratta di un caso unico all'interno dei protocolli analizzati: spesso viene fatto riferimento a modalità didattiche e strumenti teorici interpretativi che non fanno parte del syllabus dei corsi in questione, ma che appartengono al bagaglio culturale degli Studenti di Scienze della Formazione Primaria coinvolti.



## 6. Discussione e conclusioni

In questo contributo si è presentato il quadro teorico della Conoscenza Matematica per l'Insegnamento (Ball, Thames, Phelps, 2008) e il suo utilizzo come base per valutare la validità di contenuto di una consegna che dovrebbe mettere in luce la *Conoscenza pedagogica del contenuto* (Shulman, 1986) di studenti di Scienze della Formazione Primaria. L'esempio riportato e analizzato permette di affermare che è possibile costruire consegne volte alla valutazione dei singoli sotto-ambiti di conoscenza. Come è emerso dall'analisi dei protocolli, ci sono evidenze di tutti e tre i sotto-ambiti di conoscenza, tuttavia la *Conoscenza del contenuto e del curriculum* risulta meno evidente. Que-

sto suggerisce un difetto di validità del contenuto: risulta necessaria una prima revisione della consegna proposta; potrebbe essere importante esplicitare l'aspettativa di riferimento a indicazioni curriculari ministeriali che riguardano l'insegnamento della matematica nei gradi scolari di interesse.

Oltre alla necessità di future revisioni, l'analisi fornisce anche alcuni elementi circa le potenzialità di questa consegna nel fornire evidenze relative alla *Conoscenza del contenuto e degli studenti* e alla *Conoscenza del contenuto e dell'insegnamento*. Solo una minoranza dei corsisti a cui è stata presentata la consegna ha esperienza di insegnamento, perciò è particolarmente interessante notare quanto essi si siano "immedesimati" e abbiano svolto analisi dettagliate, probabilmente anche a partire dalle esperienze di tirocinio. È evidente lo sforzo nell'individuazione e interpretazione degli errori e delle difficoltà che possono emergere nel processo di apprendimento della matematica da parte degli studenti di scuola primaria. A questo si aggiunge la capacità di progettare in modo ponderato situazioni didattiche e di implementare metodologie specifiche finalizzate a un dato obiettivo individuato proprio a partire dall'analisi delle difficoltà degli studenti. Chiaramente, questo avviene con modalità differenti nei vari protocolli analizzati; sono pochissimi i casi in cui questo non avviene affatto.

Durante l'analisi, a volte, emergono lacune nella conoscenza della matematica (intesa qui come Subject Matter Knowledge). Questa tipologia di evidenza è comune nei protocolli e sottolinea l'importanza del doppio dialogo tra il dominio di conoscenza della disciplina in sé e quello delle conoscenze pedagogiche. Perché possa essere un connubio fruttuoso, è necessario un opportuno bilanciamento, sia nelle pratiche didattiche sia in fase di valutazione. Si può notare che carenze dal punto di vista della conoscenza disciplinare non precludono necessariamente la valutazione della *Conoscenza pedagogica del contenuto*. Di fatto, si è rilevata la presenza di conoscenze relative ai processi di apprendimento e insegnamento della matematica, anche se qualche volta i termini matematici utilizzati non erano corretti.

Infine, risulta determinante l'intersezione con conoscenze acquisite in altri corsi all'interno delle risposte relative a questa consegna di Didattica della Matematica. Evidentemente, lavorando opportunamente sulle didattiche disciplinari e sulla didattica generale, gli studenti di Scienze della Formazione Primaria possono apprezzare la coerenza dei saperi acquisiti durante il corso di laurea e quindi spendere tali saperi per l'interpretazione dei comportamenti degli studenti di scuola primaria e della scuola dell'infanzia. In definitiva, appare lecito affermare che il connubio delle diverse didattiche può effettivamente contribuire



a un effettivo sviluppo della professionalità del docente (Falcinelli, 2007; Martignone, 2016).

Questi primi risultati aprono a implicazioni didattiche non solo per i corsi di Didattica della Matematica, ma anche per i corsi di altre didattiche disciplinari e per la relazione che questi possono avere con la didattica generale. Quesiti simili all'esempio proposto potrebbero essere adattati ad altri ambiti disciplinari diversi dalla matematica e questo potrebbe permettere di mettere in luce la *Conoscenza pedagogica del contenuto* negli studenti di Scienze della Formazione Primaria relativamente ad altre discipline. Questo tipo di consegna fa emergere anche conoscenze relative alla didattica generale; potremmo quindi supporre che l'uso di consegne simili potrebbe stimolare i futuri insegnanti a riflettere sulla spendibilità (nell'insegnamento delle singole discipline) delle conoscenze acquisite nei corsi di didattica generale.

## Riferimenti bibliografici

- Ball D.L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, 93(4), 373-397.
- Ball D.L., Thames M.H., Phelps G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- Coppola C., Di Martino P., Pacelli T., Sabena C. (2012). Primary teachers' affect: a crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 17(3-4), 101-118.
- D'Amore B., Frabboni F. (1996). *Didattica e didattiche disciplinari*. Milano: Franco Angeli.
- De Santis M., Bianchi L.L. (2017). La didattica laboratoriale come ponte tra saperi disciplinari e didattica generale. *Giornale Italiano della Ricerca Educativa*, 19, 195-208.
- Depaepe F., Verschaffel L., Kelchtermans G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12-25.
- Di Martino P., Coppola C., Mollo M., Pacelli T., Sabena C. (2013). Pre-service primary teachers' emotions: The math-redemption phenomenon. In *Proceedings of PME37 Conference* (Vol. 2, pp. 225-232). PME.
- Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg, 5, 37-65.
- Falcinelli F. (2007). Quale modello formativo per la professionalità docente? In F. Falcinelli (Ed.), *La formazione docente: competenze nelle scienze dell'educazione e nei saperi disciplinari*, 8 (pp. 11-17). Perugia: Morlacchi.



- Gardner H. (1999). *The disciplined mind*. New York: Simon & Schuster.
- Hill H.C., Ball D.L., Schilling S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 39(4), 372-400.
- Martignone F. (2016). Un'attività di formazione per insegnanti di scuola secondaria di primo grado: analisi di prove Invalsi di matematica. *Form@re*, 16(1).
- Martini B. (2001). *Didattiche disciplinari. Aspetti teorici e metodologici*. Bologna: Pitagora.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*. Roma: Autore.
- Nigris E. (2012). Didattica e saperi disciplinari: un dialogo da costruire. In P.C. Rivoltella, P.G. Rossi (Eds.), *L'agire didattico. Manuale per l'insegnante* (pp. 59-79). Brescia: La Scuola.
- Shulman L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.
- Vygotskij L.S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard: University press.

