L'insegnamento della geometria nella scuola secondaria di I grado
Contributi di una ricerca

Geometry teaching in secondary school (first grade)

ANTONIO MARZANO • ARCISIO BRUNETTI

Ad Arcisio, la cui prematura scomparsa ci priva della gioia di poter vivere insieme questa pubblicazione

Dall'analisi dei risultati delle indagini nazionali e internazionali (Invalsi, Timms, Ocse-Pisa) sulle competenze degli studenti italiani in matematica emergono diverse criticità. In particolare è stato evidenziato come gli studenti non sono in grado di utilizzare le abilità apprese in contesti meno strutturati.
Alla luce di queste risultanze da più parti viene richiamata la necessità di rivedere le metodologie di insegnamento puntando su percorsi didattici orientati alla costruzione di significati degli oggetti geometrici attraverso attività laboratoriali basate sulla ricerca e sull'apprendimento collaborativo.
Il contributo espone i risultati di una sperimentazione condotta nella scuola secondaria di I grado con lo scopo di valutare l'efficacia di un percorso di didattica dei triangoli basato sulla teoria di van Hiele e utilizzando un software di geometria dinamica come strumento di insegnamento-apprendimento.

The results of national and international researches (Invalsi, Timms, Ocse-Pisa) about Italian students competences in maths, show several problems. In particular they found that students cant't use their abilities in less structured contests.
They think it is necessary to check teaching methodologies and head for didactic course based on the meaning construction of geometric objects through research and cooperative learning laboratories.
This work contains the results of a research made in a scuola media. The goal of this research is to evaluate the efficacy of a didactic course of triangles based on van Hiele theory using a dynamic geometry software as teaching-learning tool.

Parole chiave: triangoli, geometria dinamica, teoria di van Hiele, pensiero geometrico, risoluzione di problemi.

Key words: triangle, dynamic geometry, van Hiele theory, geometrical thinking, problem solving.

- **Antonio Marzano, professore a contratto, Università degli Studi di Salerno.**
- **Arcisio Brunetti, professore di matematica, scuola secondaria di I grado.**

Presentazione, obiettivi e ipotesi

La problematicità legata alla didattica delle discipline è di natura duplice: va individuata, da una parte, nella trasformazione dello statuto epistemologico di ogni singola materia di studio (fenomeno che nella società complessa dell'innovazione scientifica e tecnologica è ancora più rapido) e, dall'altra, nelle difficoltà che i docenti possono incontrare nel predisporre itinerari didattici validi ed efficaci per la co-costruzione dei saperi e lo sviluppo delle specifiche competenze disciplinari. In tal senso anche l'insegnamento della geometria si trova a dover fronteggiare questi nodi problematici e gli esiti non sono incoraggianti. Dall'analisi dei risultati delle indagini nazionali e internazionali (Invalsi, Timms, Ocse-Pisa), infatti, emergono aspetti di forte criticità: nella sostanza e in sintesi, gli studenti non sono in grado di applicare le abilità apprese a scuola in un contesto meno strutturato. La lacuna riguarda il modo di pensare ed analizzare secondo, come aveva espresso Pascal, l'*esprit de géométrie*.

In Italia, d'altra parte, sono ben note le difficoltà che incontrano gli studenti delle scuole secondarie di secondo grado nell'affrontare lo studio della geometria, ed in modo particolare nella dimostrazione dei teoremi. Tali difficoltà sono spesso dovute alla mancanza di adeguate esperienze nella manipolazione e nell'esplorazione di figure geometriche nel corso degli studi precedenti. Queste di attività sono indispensabili per far progredire gli allievi nella capacità di osservazione e di analisi.

Gli studenti ricevono definizioni e spiegazioni preconfezionate e non sono stimolati a formulare congetture. Frequentemente le figure rappresentate creano dei misconcetti poiché hanno sempre una orientazione standard. Va poi aggiunto come la costruzione di figure geometriche con riga e compasso viene spesso evitata o ridotta al minimo dagli insegnanti, sia perché queste attività portano via molto tempo, sia perché le figure ottenute risultano il più delle volte poco accurate. Individuare metodologie didattiche più efficaci diventa, dunque, un'operazione cruciale oltre che significativa. In questa prospettiva la teoria sullo sviluppo del pensiero geometrico di Van Hiele[1] e le critiche sollevate da Fuys, Geddes e Tischler[2] nei confronti delle metodologie e dei contenuti dei libri di testo di geometria adottati nelle scuole, risultano in gran parte attuali ancora oggi. Questi autori concordano nel ritenere necessario modificare le attività e i relativi materiali presentati nei libri di testo

1 Dina van Hiele-Geldof e Pierre M. van Hiele presentano per la prima volta la teoria sullo sviluppo del pensiero geometrico nel 1957 con la dissertazione di dottorato *De problematick van het inzicht gedmonstreed van het inzicht van schodkindren in meetkundeleerstof* (Unpublished doctoral dissertation) all'Università di Utrecht. Segue un'intensa attività testimoniata da numerosi articoli accademici tra i quali si ricordano: (1958), A method of initiation into geometry at secondary schools. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry* (pp. 67–80). Groningen, The Netherlands: J. B. Wolters; (1959), *Development and the learning process*. Acta Paedogogica Ultrajectina (pp. 1-31); (1973), *Begrip en inzicht. Purmerend*, The Netherlands: Muusses; (1980), *Levels of thinking, how to meet them. how to avoid them.* Paper presented at the presession meeting of the Special Interest Group for Research in Mathematics Education, National Council of Teachers of Mathematics, Seattle, WA.; (1984), A child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele (pp. 243-252). Brooklyn: Brooklyn College; (1987), *Finding levels in geometry by using the levels in arithmetic.* Paper presented at the Conference on Learning and Teaching Geometry, Syracuse University, Syracuse, NY. Pierre M. van Hiele pubblicherà la sua opera fondamentale *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education* (Academic Press, New York) nel 1986.

2 Fuys D., Geddes D., Tischler R., (1984), *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele,* School of Education, Brooklyn College, New York. Successivamente, Fuys, Geddes e Tischler ribadiranno le loro critiche nell'articolo: The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents, in *Journal for Research in Mathematics Education Monographs n. 3,* NCTM, Reston, USA, 1988.

per favorire negli studenti lo sviluppo di processi cognitivi quali la capacità di adattare le proprie conoscenze a nuove situazioni e la risoluzione di problemi in contesti nuovi e inconsueti.

Tenuto conto di queste premesse, il presente contributo espone i risultati di una sperimentazione condotta su allievi del primo anno di scuola secondaria di primo grado con lo scopo (*hp*) di verificare e valutare l'efficacia di un percorso di didattica dei triangoli mediante una serie di applicativi progettati, implementati e sviluppati da Arcisio Brunetti[3], coautore del presente contributo, utilizzando l'ambiente di sviluppo open source Geogebra[4] e seguendo un itinerario che ha avuto come base di riferimento le cinque fasi di apprendimento della teoria di van Hiele.

Dopo aver illustrato brevemente il quadro di riferimento teorico e il software utilizzato, verranno descritte le diverse fasi della sperimentazione, alcune delle attività realizzate con gli alunni appartenenti al gruppo sperimentale ed i risultati ottenuti.

Il punto di partenza

Una teoria che si è dimostrata particolarmente efficace nella progettazione di itinerari didattici in geometria è quella strutturata e sviluppata dei coniugi olandesi P.M van Hiele e Dina van Hiele-Geldof tra il 1957 e il 1986[5]. Questa teoria ha motivato importanti ricerche, prima in Unione Sovietica e successivamente negli Stati Uniti, che hanno indotto numerosi cambiamenti nel curricolo di geometria adottato nei due Paesi.

Secondo tale teoria lo sviluppo del pensiero geometrico degli studenti procede in modo progressivo attraverso livelli di pensiero e dipende più dall'esperienza maturata dallo studente su un determinato argomento piuttosto che dall'età o dalla maturazione biologica dello stesso (in questo senso, la teoria si discosta da quella di Piaget): le esperienze scolastiche progettate dall'insegnante sono quindi di fondamentale importanza per far progredire lo studente da un livello inferiore a quello successivo.

Il modello di van Hiele[6] si caratterizza essenzialmente per tre aspetti: l'esistenza di livelli di pensiero, le proprietà dei livelli e la progressione da un livello di pensiero al successivo.

Van Hiele distingue cinque livelli di pensiero nella comprensione dei concetti geometrici da parte degli studenti le cui caratteristiche possono essere così descritte:

- *Livello 0* (Visualizzazione): Gli allievi percepiscono le figure geometriche in base al loro aspetto globale. Essi riconoscono triangoli, quadrati, rettangoli, eccetera, in base alla loro forma, ma non riescono ad individuare espressamente le proprietà di queste figure o le relazioni che intercorrono fra le varie parti che compongono la figura stessa.
- *Livello 1* (Analisi): Gli allievi possono analizzare le figure geometriche (anche se in modo

3 Le versioni shareware sono scaricabili dal sito: www.arcisio.com.

4 Geogebra è un software libero per l'apprendimento e l'insegnamento della matematica (www.geogebra.org/cms/). Il nome deriva da "GEOmetria e alGEBRA". È stato sviluppato da Markus Hohenwarter presso la Florida Atlantic University per la didattica della matematica nella scuola.

5 van Hiele Pierre M., (1986), *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press, New York.

6 La teoria sullo sviluppo del pensiero geometrico, è stata seguita da successivi *arrangiamenti*. A tal riguardo, si suggerisce: Clements D. H., Battista M.T., (1992), Geometry and spatial reasoning, in *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan, New York, pp. 420-464.

informale), classificarle, individuare le principali proprietà ed utilizzare l'opportuna terminologia per descriverle, ma non sono in grado di collegare tra loro figure e proprietà.
- *Livello 2* (Deduzione informale): Lo studente espone in modo logico le proprietà delle figure, è in grado di fare brevi catene di deduzioni, di formulare definizioni ed è capace di stabilire se una determinata proprietà è condizione necessaria e/o sufficiente per classificare una figura geometrica.
- *Livello 3* (Deduzione formale): Lo studente può sviluppare sequenze logiche di deduzioni più lunghe, comprende il significato e il ruolo dei postulati, degli assiomi, dei teoremi e delle dimostrazioni.
- *Livello 4* (Rigore): Gli studenti possono lavorare in diversi sistemi assiomatici, cioè possono studiare le geometrie non euclidee e confrontarle.

Circa le proprietà di ciascun livello,Van Hiele identifica alcune criteri qualitativi strutturati in maniera gerarchica e che Usiskin[7] ha sintetizzato nel modo seguente:

- *Ordine fisso*: gli studenti progrediscono attraverso i vari livelli secondo un ordine fisso; in altre parole, uno studente non può trovarsi al livello *n* senza aver superato prima il livello *n-1*.
- *Adiacenza:* ad ogni livello di pensiero ciò che era intrinseco nel precedente livello diviene estrinseco nel livello corrente.
- *Distinzione*: ogni livello ha i propri simboli linguistici ed una propria rete di relazioni che collega questi simboli; una relazione che è "corretta" ad un livello può rivelarsi non corretta ad un altro livello.
- *Separazione*: due persone che ragionano a diversi livelli non possono comprendersi l'un l'altro. Questo è quello che spesso accade fra insegnante e studente. Nessuno dei due riesce a seguire il pensiero dell'altro e il loro dialogo può procedere solo se l'insegnante riesce a formarsi un'idea del pensiero dello studente e a conformarsi ad esso.

Van Hiele afferma che il passaggio da un livello al successivo deve essere realizzato dagli alunni stessi e che la funzione dell'insegnante è quella di progettare attività che favoriscono questa transizione. Van Hiele ha individuato cinque fasi progressive di apprendimento per guidare l'alunno ad un più alto livello di pensiero di cui tener conto in sede di progettazione delle attività didattiche. Nello specifico:

- *Fase 1 – Informazione*: lo studente inizia ad avere un primo contatto con gli oggetti di studio, sia attraverso il materiale che gli viene fornito, sia attraverso la discussione con l'insegnante e con i compagni. In questa fase l'insegnante si renderà conto delle conoscenze possedute degli studenti sull'argomento, del loro livello di apprendimento, di eventuali misconcetti, ecc.
- *Fase 2 – Orientazione rigida*: lo studente inizia ad esplorare l'oggetto di studio per mezzo di attività opportunamente predisposte dall'insegnante. Il materiale è selezionato in modo che le strutture caratteristiche gli appaiano in modo graduale. Le attività consistono in compiti facili e brevi che richiedono risposte specifiche.

7 Cfr. Usiskin Z., (1982), *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry, Final report of the cognitive development and achievement in secondary school geometry Project*, University of Chicago, Department of Education.

- *Fase 3 – Esplicitazione*: le esperienze acquisite sono collegate ad esatti simboli linguistici e gli studenti imparano ad esprimere le loro opinioni sulle strutture osservate durante le attività e le discussioni in classe. L'insegnante deve avere cura che durante queste discussioni venga utilizzato il linguaggio naturale. È durante questa fase che il sistema di relazioni è parzialmente formato.
- *Fase 4 – Orientazione libera*: gli studenti applicano le conoscenze acquisite in nuove investigazioni, possibilmente per mezzo di compiti che possono essere portati a termine in modo differente.
- *Fase 5 – Integrazione*: lo studente ha orientato se stesso, ma deve ancora acquisire una panoramica di tutti i metodi che sono a sua disposizione. Così egli cerca di condensare in un unico complesso il dominio che ha esplorato il suo pensiero. A questo punto l'insegnante può (aiutare) accelerare questo lavoro fornendo una veduta di insieme. È importante che questo quadro d'insieme non presenti nulla di nuovo per lo studente; esso deve solo essere una ricapitolazione di quello che lo studente già conosce.

Durante le transizioni van Hiele considera la discussione la parte più importante del processo di insegnamento-apprendimento. In particolare nella fase di esplicitazione l'insegnante ha il ruolo di guida nel senso che inserisce la discussione nel flusso dell'attività della classe e ne influenza lo sviluppo attraverso interventi mirati allo scopo di socializzare e valutare collettivamente le strategie usate dai singoli allievi nella soluzione di un problema e costruire (quando è possibile) una o più rappresentazioni e soluzioni condivise da tutta la classe[8].

Circa i software di geometria dinamica (DGS: Dynamic Geometry Software), la loro comparsa è avvenuta negli anni '80, rivitalizzando l'insegnamento della geometria e suscitando l'attenzione di molti ricercatori in tutto il mondo sul ruolo svolto da questi ambienti applicativi nei processi di insegnamento-apprendimento della geometria.

L'importanza di una rappresentazione dinamica delle figure veniva d'altronde sottolineata già negli *Orientamenti per la lettura dei contenuti* dei "Nuovi programmi per la scuola media" del 1979: "Lo studio della geometria trarrà vantaggio da una presentazione non statica delle figure, che ne renda evidenti le proprietà nell'atto del loro modificarsi".

I DSG, quali ad esempio Cabri, Geometer's Sketcpad, Cindirella, permettono di costruire sullo schermo del computer enti geometrici in modo rapido e preciso con azioni molto vicine a quelle utilizzate nell'ambiente "*carta e matita*". Una volta create, queste figure, possono essere modificate dinamicamente con l'aiuto del mouse trascinando gli elementi base. In questo modo è possibile far assumere alla figura un'infinità di posizioni e configurazioni differenti, mentre le proprietà e le relazioni imposte al momento della costruzione si conservano quando la figura viene modificata. Come afferma Emma Castelnuovo, anche "la costruzione di una figura con riga e compasso vincola la libertà di pensiero per il fatto che porta a considerare solo un numero finito di casi: il disegno, per la sua staticità, non stimola l'osservazione e non può quindi condurre a fare scoperte" (Castelnuovo E., 2009).

Queste attività contribuiscono a sviluppare un processo di apprendimento per scoperta: gli allievi, infatti, possono osservare ed esplorare la figura e le sue proprietà, formulare congetture e ricevere un feedback immediato alle loro ipotesi. In questo modo, secondo Clements[9] e in coerenza con quanto affermato da van Hiele, la manipolazione dinamica aiuta

8 Cfr. Bartolini Bussi M.G., Boni M., Ferri F., (1995), *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Rapporto tecnico n.21 NRD di Modena, Comune di Modena.

9 Clements D. H., Battista M.T., Sarama J., Swaminathan S., (1997), Development of students' spatial thinking in a unit on geometric motions and area, in *The Elementary School Journal, 98* (2), pp. 171-186.

gli studenti a transitare dal livello della visualizzazione a quello dell'analisi. Queste attività, quindi, contribuiscono allo sviluppo del *pensiero matematico* facilitando e mettendo in grado gli studenti di procedere ad un *livello* superiore. Come già anticipato in premessa, ci si è serviti dell'ambiente di sviluppo *Geogebra* mediante il quale sono stati progettati, implementati e sviluppati tutti gli applicativi utilizzati per la sperimentazione che viene presentata in questo contributo.

Una delle funzioni più importanti dei DGS, per le implicazioni cognitive che comporta, è il *dragging* (trascinamento di un oggetto con il mouse). Olivero e Arzarello[10] descrivono le differenti modalità di dragging osservate nel corso di sperimentazioni condotte con diversi studenti frequentanti la scuola secondaria di II grado:

- *Wandering dragging*: trascinare a caso i componenti della figura, per scoprire eventuali regolarità, invarianti, proprietà.
- *Bound dragging*: trascinare un punto che è già vincolato a un oggetto.
- *Guided dragging*: trascinare i punti base della figura per darle una particolare forma.
- *Lieu muet dragging*: trascinare un punto della figura lungo una traiettoria privilegiata (lieu muet = percorso silenzioso), costruita empiricamente mediante l'interazione percettiva tra figure sullo schermo e movimenti del mouse, in modo da conservare una certa proprietà o regolarità.
- *Line dragging*: segnare i punti che mantengono una proprietà della figura; (con il *line dragging* il *lieu muet* diventa esplicito a livello visivo).
- *Linked dragging*: vincolare un punto a un oggetto (ad esempio quello del line dragging, ove possibile) muovendo poi il punto sull'oggetto.
- *Dragging test*: è la prova del trascinamento effettuata per vedere se la figura disegnata mantiene quelle proprietà geometriche che le si volevano attribuire (se ciò avviene la figura supera il test, altrimenti la figura non è stata costruita secondo le proprietà che le si volevano attribuire).

La descrizione della ricerca

L'indagine ha coinvolto quattro classi del primo anno della scuola secondaria di primo grado "S. Penna" di Battipaglia per un totale di 80 alunni[11]. Due classi (il Gruppo di Controllo, GC), per complessivi 40 alunni, hanno seguito il percorso tradizionale con lezioni frontali e attività con "carta e matita", mentre due classi (il Gruppo Sperimentale, GS), per un totale di 40 alunni, sono state impegnate in attività di esplorazione di figure dinamiche mediante gli applicativi all'uopo sviluppati seguendo un itinerario che ha avuto come base di riferimento la teoria di van Hiele.

10 Olivero F. (1999), *Cabri-géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations*. In: W. Maull & J. Sharp (eds), Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, University of Plymouth, UK; Arzarello, Olivero, Paola, Robutti (2002), *A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments*, ZDM 2002,34(3).

11 Non potendo procedere al campionamento dei soggetti, siamo ricorsi ad un disegno quasi-sperimentale *con gruppo di controllo non equivalente*. "La parola quasi significa *come se* o *in un certo grado*. Così, un quasi-esperimento assomiglia ad un esperimento, ma manca almeno di una caratteristica che può renderlo tale: se in un vero esperimento è possibile *assegnare* i soggetti alle condizioni sperimentali, in un quasi-esperimento i soggetti da assegnare alle diverse condizioni sono *selezionati* da gruppi già esistenti" (McBurney D. H., 2001, *Metodologia della ricerca in psicologia,* Il Mulino, Bologna, p.319).

La sperimentazione, svolta nei mesi di marzo e aprile del 2009 e per una durata complessiva di 20 ore, si è concentrata sui primi tre livelli di van Hiele (visualizzazione, analisi, deduzione informale), che sono quelli più pertinenti per alunni di questa età (11-12 anni), ed è stata articolata in tre fasi.

La prima fase ha avuto lo scopo di investigare e verificare le conoscenze possedute dagli alunni sui triangoli, attraverso la somministrazione di test diagnostici e la susseguente discussione in classe. Successivamente gli allievi sono stati impegnati in attività di esplorazione di figure geometriche dinamiche realizzate utilizzando l'ambiente di sviluppo *Geogebra*. Infine sono state somministrate delle prove per verificare il livello di analisi di figure geometriche raggiunto e la capacità di argomentare circa la risposta fornita e/o la strategia adottata. Entriamo nello specifico.

La prima fase, si è detto, ha avuto lo scopo di accertare le conoscenze possedute sull'argomento dagli allievi. A tal fine è stato somministrato un test appositamente predisposto per verificare la situazione di partenza dei due gruppi. Le risposte degli studenti sono state successivamente oggetto di discussione in classe per stimolare negli allievi osservazioni ed interrogativi. In questo modo si è potuto rilevare la presenza di misconcetti e il vocabolario utilizzato alfine di chiarire il significato di alcuni termini e di introdurne di nuovi.

Nella tabella 1 si riportano i risultati dell'analisi descrittiva. L'elaborazione dei dati è stata effettuata considerando i punteggi conseguiti nell'area delle conoscenze (ACn, 9 sub-item per l'accertamento delle conoscenze) e nell'area delle competenze (ACp, 13 sub-item per l'accertamento dei livelli di competenza posseduti).

	GS		GC	
	Media	Dev	Media	Dev
ACn al pre-test	6,15	1,46	6,03	1,23
ACp al pre-test	0,75	1,13	0,68	1,29

Tab. 1

Tenuto conto della numerosità ridotta del campione coinvolto, inoltre, si è ritenuto opportuno, per la verifica delle ipotesi della ricerca, utilizzare il test non parametrico di Mann-Whitney per il confronto dei due campioni (tabb. 2 e 3).

		Media dei ranghi	Somma dei ranghi
ACn	GS	41,00	1640,00
	GC	40,00	1600,00
ACp	GS	42,58	1703,00
	GC	38,42	1537,00

Tab. 2

	Pre-test	
	ACn	ACp
Mann-Whitney U	780,00	717,00
p	0,844	0,351

Tab. 3

Da un punto di vista statistico, l'analisi della situazione di partenza non ha evidenziato sostanziali differenze fra i due gruppi. Questi risultano equivalenti, con una leggera migliore prestazione complessiva (tab. 1) degli alunni del gruppo sperimentale. Circa il controllo delle prestazioni per genere, inoltre, non si sono rilevate differenze statisticamente significative tra maschi e femmine. Va sottolineato, inoltre, come il test iniziale abbia evidenziato in tutti i soggetti coinvolti ampie carenze relative da un lato all'analisi degli elementi di una figura e il riconoscimento delle proprietà e, dall'altro, alla capacità di mettere in atto nuove strategie risolutive utilizzando le conoscenze possedute (ACp).

Il test iniziale comprendeva cinque domande (per un totale di num. 22 sub-item) che di seguito vengono descritte. Con la prima si chiedeva di identificare dei triangoli in un insieme di figure assegnate (fig. 1) con lo scopo di sondare l'immagine mentale che gli studenti avevano del triangolo (livello di *visualizzazione*).

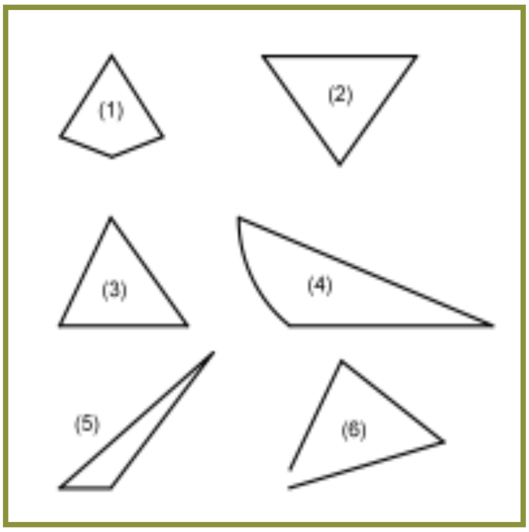


Fig. 1

Va notato, dall'analisi delle risposte, che diversi studenti hanno considerato come triangoli le figure 1, 4 e, soprattutto, la 6. Nella discussione successiva, alla richiesta di motivare le scelte operate, sono state fornite delle spiegazioni quali:

Il triangolo 1 è un triangolo con la base storta.
Il Il triangolo 4 è un triangolo con un lato curvo.
Il triangolo 6 è un triangolo con un pezzo mancante.

Quest'ultima risposta, in particolare, ha fatto registrare una elevata percentuale di risposte sbagliate (intorno all'84%). Alcuni alunni hanno corretto la figura prolungando i due segmenti fino a formare il triangolo. Altri, invece, hanno descritto la figura 2 come un "triangolo capovolto" e la 5 come "un triangolo inclinato".

Il prototipo di triangolo che più si avvicina alla loro immagine mentale è il triangolo 3, da alcuni definito come un triangolo "perfetto" oppure con frasi del tipo "è proprio un triangolo".

La seconda e la terza domanda avevano lo scopo di comprendere se gli allievi conoscessero alcune proprietà fondamentali dei triangoli (proprietà dei lati[12] e somma degli angoli interni). In queste domande si è preferito non inserire delle figure per evitare che gli allievi potessero trarre da esse un valore approssimato che influenzasse la loro risposta.

2. Due lati di un triangolo misurano rispettivamente cm 3 e cm 5. Secondo te, quale potrebbe essere la misura del terzo lato ?
Segna con una croce la risposta che ritieni corretta.

- ☐ **A. Cm 6**
- ☐ **B. Cm 8**
- ☐ **C. Cm 10**
- ☐ **D. Qualsiasi lunghezza**

12 La proprietà dei lati di un triangolo secondo cui ciascun lato è minore della somma degli altri due lati.

La percentuale di risposte corrette è stata molto bassa in entrambi i gruppi (intorno al 15-16%). Agli alunni che hanno risposto correttamente è stato chiesto di motivare la loro risposta, ma solo tre di essi (due del GC e uno del GS) hanno risposto "altrimenti il triangolo non si chiude". Ciò, almeno in parte, va attribuito alla poca attenzione prestata, nella scuola primaria, ad attività di esplorazione e manipolazione di figure geometriche prediligendo il calcolo di perimetro e aree che non forniscono, da soli, alcun contributo alla costruzione del pensiero geometrico.

3. Due angoli interni di un triangolo misurano 70° e 80°. Secondo te, quale potrebbe essere la misura del terzo angolo?
Segna con una croce la risposta che ritieni corretta.

- ☐ **A. 30°**
- ☐ **B. 90°**
- ☐ **D. 180°**
- ☐ **E. Qualsiasi valore**

Anche in questo caso la percentuale di risposte corrette è stata molto bassa in entrambi i gruppi (intorno all'11%).

Con il quarto item (fig. 2) era richiesto agli allievi di classificare alcuni triangoli in base ai lati e agli angoli effettuando, se lo ritenevano necessario, anche delle misure. Lo scopo della domanda era quello di comprendere se i ragazzi fossero in grado di riconoscere i vari tipi di triangoli e classificarli in modo duplice, vale a dire se erano capaci di riconoscere che un triangolo può essere, ad esempio, sia rettangolo che isoscele.

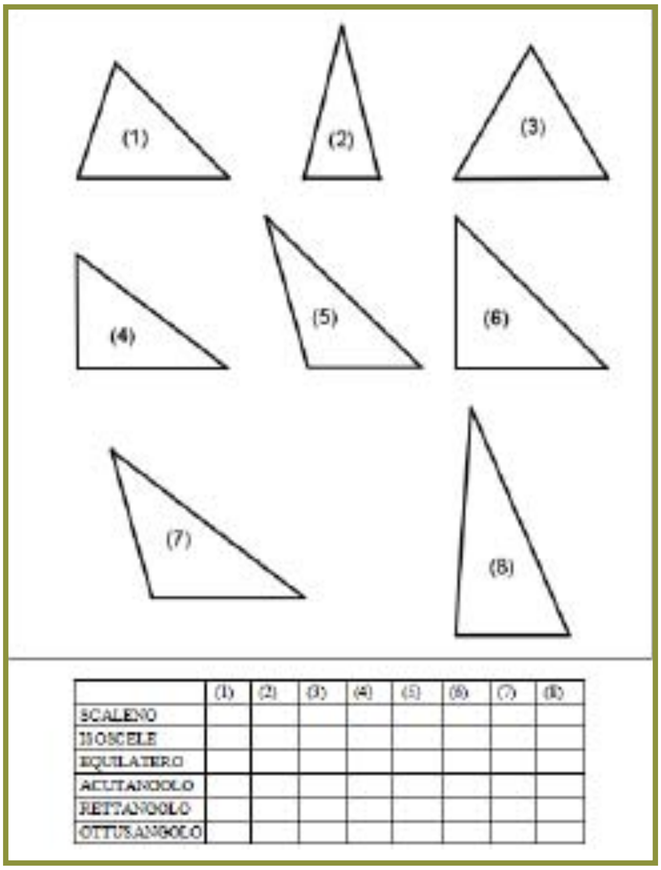


Fig. 2

La maggior parte degli allievi ha classificato i triangoli esclusivamente rispetto ai lati inserendoli in una sola delle seguenti classi: equilatero, isoscele, scaleno e rettangolo. Per quasi tutti gli alunni, in sostanza, se un triangolo appartiene ad una classe non può appartenere contemporaneamente ad un'altra. Diversi hanno classificato il triangolo 8 come isoscele "perché il triangolo isoscele è appuntito". Anche in questo caso l'errore è dovuto all'immagine mentale che i bambini si sono costruiti del triangolo isoscele veicolata spesso dai libri di testo che rappresentano, il più delle volte, il triangolo isoscele con la base molto più piccola rispetto ai lati obliqui e in posizione orizzontale. Anche per questo motivo il *triangolo 6* è stato classificato unicamente come rettan-

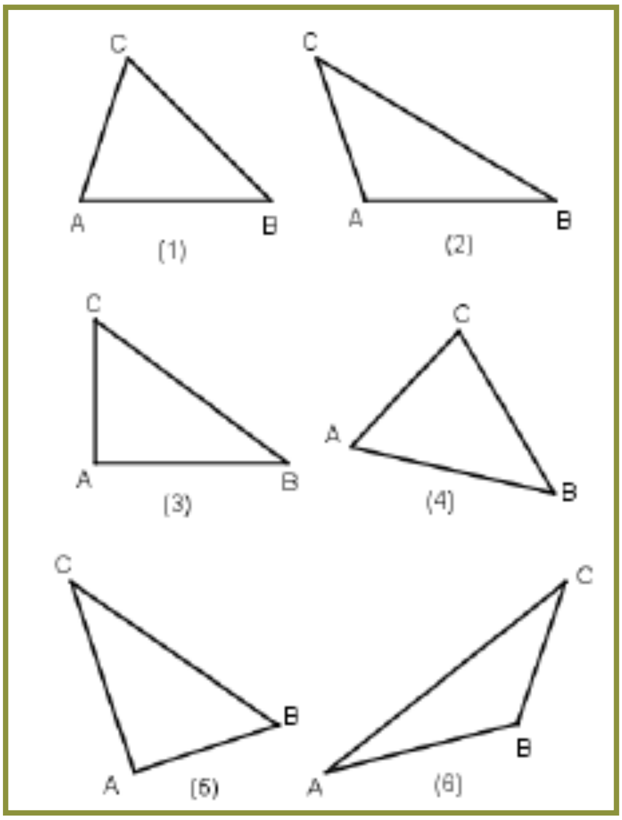


Fig. 3

golo e nessuno lo ha riconosciuto come triangolo isoscele.

Nella quinta domanda (fig. 3), infine, si chiedeva di disegnare l'altezza relativa al lato AB di alcuni triangoli con lo scopo di sondare il concetto che gli alunni avevano di "altezza relativa alla base".

L'alta percentuale di errori, soprattutto per le altezze delle figure 2, 5 e 6 è stata certamente influenzata dall'orientamento della figura. In sostanza l'altezza viene disegnata quasi sempre all'interno del triangolo.

In conclusione, le risposte fornite alla prova ci permettono di avanzare le seguenti riflessioni: gli allievi percepiscono le figure in base al loro aspetto complessivo senza essere consapevoli delle loro proprietà e delle relazioni che legano i vari elementi delle figure (*Livello 0* di van Hiele); sono emersi molti misconcetti dovuti spesso alle immagini standardizzate presentate nei libri di testo e alla confusione fra linguaggio naturale e linguaggio matematico.

Nella seconda fase gli alunni del gruppo sperimentale sono stati impegnati in attività di esplorazione guidata di figure geometriche dinamiche con lo scopo di condurli alla scoperta e alla comprensione dei concetti e delle proprietà dei triangoli.

Le attività hanno interessato i seguenti nodi concettuali: proprietà dei lati di un triangolo, somma degli angoli interni ed esterni, relazione fra lati e angoli di un triangolo, altezze, mediane, bisettrici, assi. Di seguito vengono brevemente descritte le attività più significative.

L'elemento base di ogni attività consiste nella presentazione di una figura geometrica dinamica accompagnata da una scheda contenente delle domande. La figura dinamica è costituita, in genere, da un triangolo (fig. 4) che può essere modificato con continuità trascinando i vertici con il mouse, facendogli assumere tutte le configurazioni possibili.

Le caselle di controllo permettono di visualizzare i vari elementi (altezze, mediane, bisettrici, assi, ecc.). Durante il trascinamento sullo schermo vengono visualizzate le misure delle ampiezze degli angoli e della lunghezza dei segmenti.

La funzione della scheda è quella di guidare e di orientare l'osservazione degli studenti per mezzo di domande inducendoli a focalizzare la loro attenzione su una particolare proprietà; infatti, per rispondere alle domande, l'allievo deve manipolare la figura trascinando i suoi elementi "liberi" fino a quando essa non soddisfa determinate condizioni, osservare che cosa succede, fare delle congetture e verificarle. In questa fase l'attività richiede facili compiti, con poche domande dirette che richiedono una risposta specifica (orientamento guidato).

Gli studenti lavorano in gruppi di due o tre elementi per favorire la discussione. Il docente riveste il ruolo cruciale di suggeritore/stimolatore, ponendo domande appropriate per favorire la discussione nei gruppi in modo da indirizzare gli studenti a trovare la soluzione. Successivamente le osservazioni e le congetture dei singoli gruppi sono condivise con l'intera classe e discusse pervenendo a conclusioni accettate da tutti.

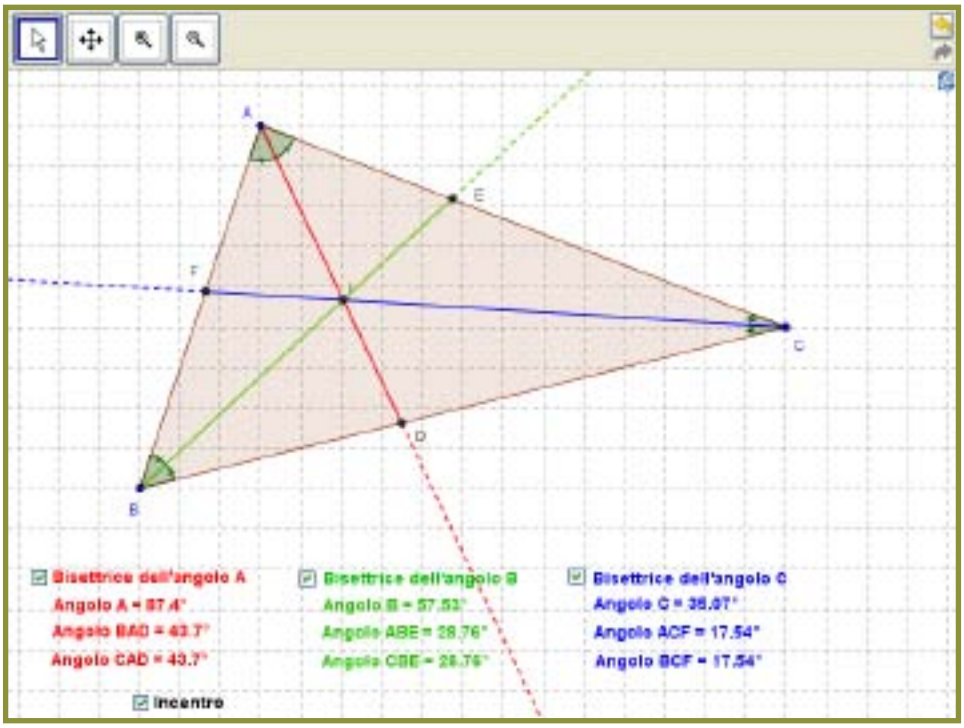


Fig. 4

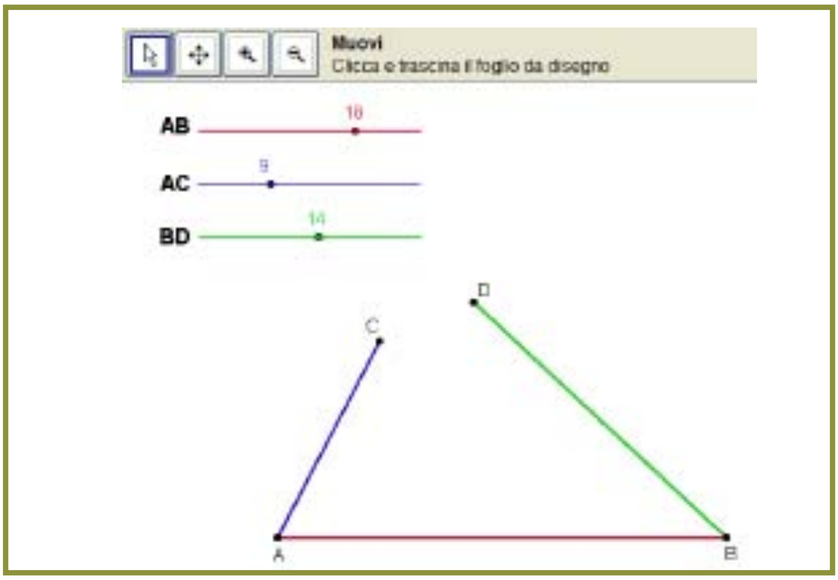
Al termine segue l'attività di *integrazione*, affidata all'insegnante, allo scopo di sistematizzare le conoscenze acquisite in un quadro più ampio attraverso la discussione e il confronto. È in questa fase che lo studente diventa consapevole delle relazioni che intercorrono fra i vari elementi della figura, tenta di esprimerle a parole, impara il linguaggio tecnico che accompagna l'oggetto di studio creando, in tal modo, una rete concettuale di relazioni.

Si riportano, a questo punto e a titolo esemplificativo, alcune attività svolte con l'ausilio dell'applicativo *Triangoli*.

Lati di un triangolo

Questa attività ha avuto lo scopo di guidare gli allievi verso la scoperta della seguente proprietà dei lati di un triangolo: *in ogni triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due lati*.

La figura dinamica (fig. 5) è costituita da tre segmenti consecutivi la cui lunghezza può essere modificata agendo sugli *slider* (cursori). Gli estremi C e D possono essere trascinati restando invariate le lunghezze dei rispettivi segmenti. Gli alunni, divisi in gruppi, avevano il compito di far coincidere i due estremi per ottenere un triangolo.



Costruisci, se possibile, i triangoli i cui lati hanno le lunghezze riportate in tabella (il lato AB è il lato più lungo).

Triangolo	Lato AB	Lato AC	Lato BD
1	18	9	14
2	20	12	10
3	25	15	12
4	22	18	16
5	21	15	10
6	25	10	13
7	20	9	10
8	25	11	13

Fig. 5

Gli alunni si sono resi immediatamente conto che in alcuni casi (triangoli 6, 7 e 8) non era possibile far coincidere i due estremi per ottenere il triangolo e che ciò dipendeva dalla lunghezza dei lati, ma non erano in grado di cogliere la condizione che dovevano soddisfare i tre segmenti per ottenere il triangolo. La discussione collettiva guidata dall'insegnante ha condotto gli alunni a focalizzare la loro attenzione sulla lunghezza dei due segmenti minori e a individuare la proprietà che devono soddisfare per ottenere il triangolo. Alcune risposte fornite dagli allievi per spiegare quello che avevano osservato sono state:

- Annamaria*: Ho osservato che alcuni triangoli non si possono costruire come il 6, 7 e 8, perché hanno il lato più lungo.*
- Giorgio*: Il triangolo non si può costruire perché AC e BD sono più corti di AB.*
- Chiara*: Quando hanno una lunghezza differente non sufficiente per non far toccare i due punti, secondo me per unire i tre punti c'è bisogno che 2 lati siano uguali e 1 maggiore, oppure uno maggiore dell'altro.*
- Luca*: Secondo me la somma dei 2 lati minori deve essere maggiore del lato maggiore per potersi incontrare in un punto.*

- Francesca*: Secondo me i triangoli 6-7-8 non sono possibili perché se sommiamo i lati AC e BD esce un numero più piccolo del lato AB.*
- Antonio*: Perché se AC e BD sono minori di AB, AC e BD non si possono incontrare in nessun punto.*

Successivamente gli studenti sono stati coinvolti in attività di costruzione di triangoli con lati di lunghezza assegnata utilizzando gli strumenti di *Geogebra*. Il docente non ha spiegato il procedimento tecnico, ma ad esso si è giunti attraverso una discussione guidata.

Altezze di un triangolo

Al termine della scuola primaria, gli allievi hanno un'immagine mentale dell'altezza di un triangolo ancora in via di accomodamento. Come risulta dalle risposte date dagli alunni durante il pretest (fig. 6), la misconcezione più frequente è che il piede dell'altezza di un triangolo *cade* sempre sul lato opposto. Questo errore frequente è in parte attribuibile ad un concetto errato di rette perpendicolari.

Nei libri di testo di geometria per la scuola secondaria di primo grado l'argomento viene affrontato dando la definizione di rette perpendicolari e illustrando il procedimento per la loro costruzione con riga e compasso. Normalmente nessun sforzo è fatto per collegare questo concetto ad una situazione concreta. Il risultato è che gli alunni sanno ripetere la definizione di rette perpendicolari ma il più delle volte incontrano difficoltà nel tracciare l'altezza di una figura geometrica quando questa è posta in una posizione non standard.

In questo caso, ed in altri simili, occorre far precedere la trattazione da esperienze volte a ricostruire i *nuovi concetti*. Tali esperienze possono essere situazioni problematiche, applicate in un contesto reale e motivante per gli studenti, che non possono essere risolte con l'applicazione delle conoscenze già in loro possesso, ma necessitano di sperimentare nuove e diverse strategie. Per questi motivi, prima di affrontare lo studio delle altezze di un triangolo, gli allievi sono stati impegnati in una situazione-problema avente le scopo di condurli alla ri-costruzione del concetto di rette perpendicolari e di distanza di un punto da una retta come "*distanza più breve*". Agli studenti è stato chiesto di risolvere il seguente compito un appositamente predisposto utilizzando l'ambiente di sviluppo *Geogebra* (Fig. 7).

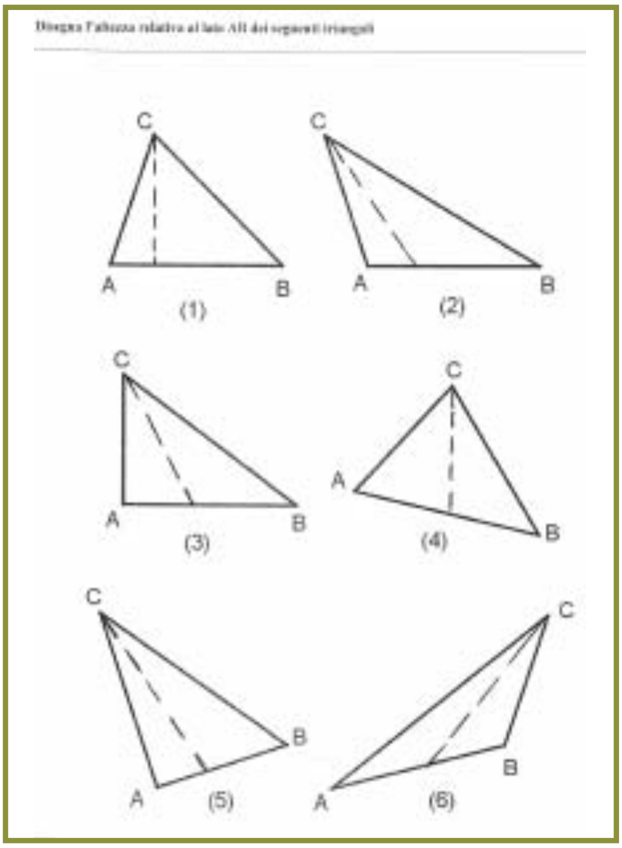
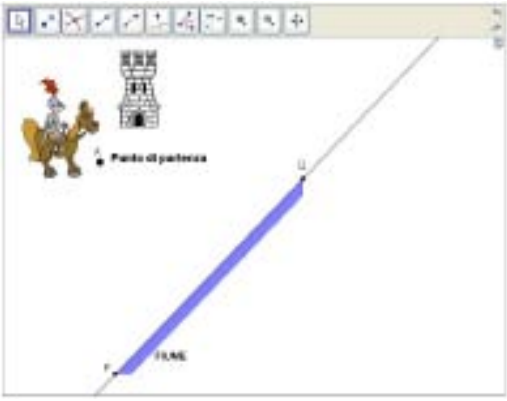


Fig. 6



Un cavaliere vive in una torre e deve portare ad abbeverare il suo cavallo al fiume.
Egli parte dal punto A e deve raggiungere la riva del fiume rappresentata dalla retta PQ.
Sapresti aiutare il cavaliere ad individuare il percorso più breve per giungere al fiume?

Fig. 7

I discenti inizialmente hanno affrontato la situazione problematica per tentativi inserendo dei punti in prossimità della riva del fiume e misurando la distanza dal punto A fino ad individuare approssimativamente il punto B che rendeva minima la distanza di A dalla retta del fiume (PQ). A questo punto l'insegnante ha posto alcune domande per stimolare l'osservazione:

In che posizione devono trovarsi il segmento AB e la retta PQ?
Che angolo forma AB con la retta PQ?
È un angolo particolare?

Gli allievi dopo aver tracciato il segmento AB e misurato l'angolo che esso forma con PQ (fig. 8*a*) sono giunti alla conclusione che il percorso più breve si ottiene quando AB forma un angolo retto con la retta PQ (fig. 8*b*). A questo punto l'insegnante ha spiegato che in questo caso si dice che AB e PQ sono perpendicolari e che *Geogebra* offre la possibilità di tracciare la perpendicolare ad una retta per un punto assegnato e ha illustrato il procedimento tecnico. Gli alunni sono stati invitati ad effettuare una verifica costruendo la retta perpendicolare a PQ passante per A ed osservando che essa si sovrapponeva ad AB. Acquisito correttamente il concetto di perpendicolare ad una retta per un punto, si è proceduto ad esplorare come variano le altezze di un triangolo e le loro proprietà.

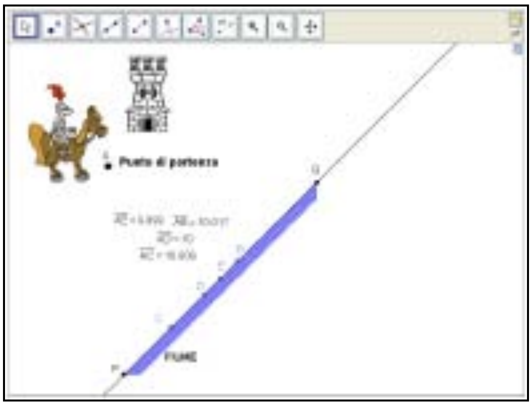


Fig. 8a

Fig. 8b

Anche in questo caso la figura dinamica utilizzata per condurre gli alunni alla scoperta delle proprietà delle altezze è costituita da un triangolo (fig. 9) i cui vertici possono essere trascinati. Le caselle di controllo permettono di visualizzare le altezze relative ai tre lati e l'ortocentro. Sullo schermo vengono visualizzate le ampiezze degli angoli interni per permettere di riconoscere i vari tipi di triangoli.

Gli alunni, guidati dalle schede, visualizzando inizialmente una sola altezza e osservando la sua posizione nei diversi tipi di triangoli (acutangolo, rettangolo e ottusangolo), hanno constatato che l'altezza del triangolo non è sempre interna ad esso. La discussione collettiva ha fatto emergere anche altre caratteristiche non espressamente richieste nella scheda:

- Ins.: *In quali casi l'altezza è interna al triangolo?*
- Valentina: *Se il triangolo è acutangolo l'altezza è interna al triangolo. Se abbiamo un triangolo rettangolo l'altezza è il cateto.*
- Chiara: *Non è vero, dipende da come facciamo l'altezza. Io ho visto che anche nel triangolo rettangolo l'altezza può essere interna. Se per esempio facciamo l'altezza che parte dall'angolo di 90° l'altezza cade dentro il triangolo anche se è rettangolo…*
- Emanuela: *…nel triangolo rettangolo due altezze cadono sui cateti e una cade dentro il triangolo.*
- Luca: *Anche nel triangolo ottusangolo due altezze cadono fuori e una cade dentro. L'altezza che parte dall'angolo ottuso cade dentro il triangolo le altre due cadono fuori.*

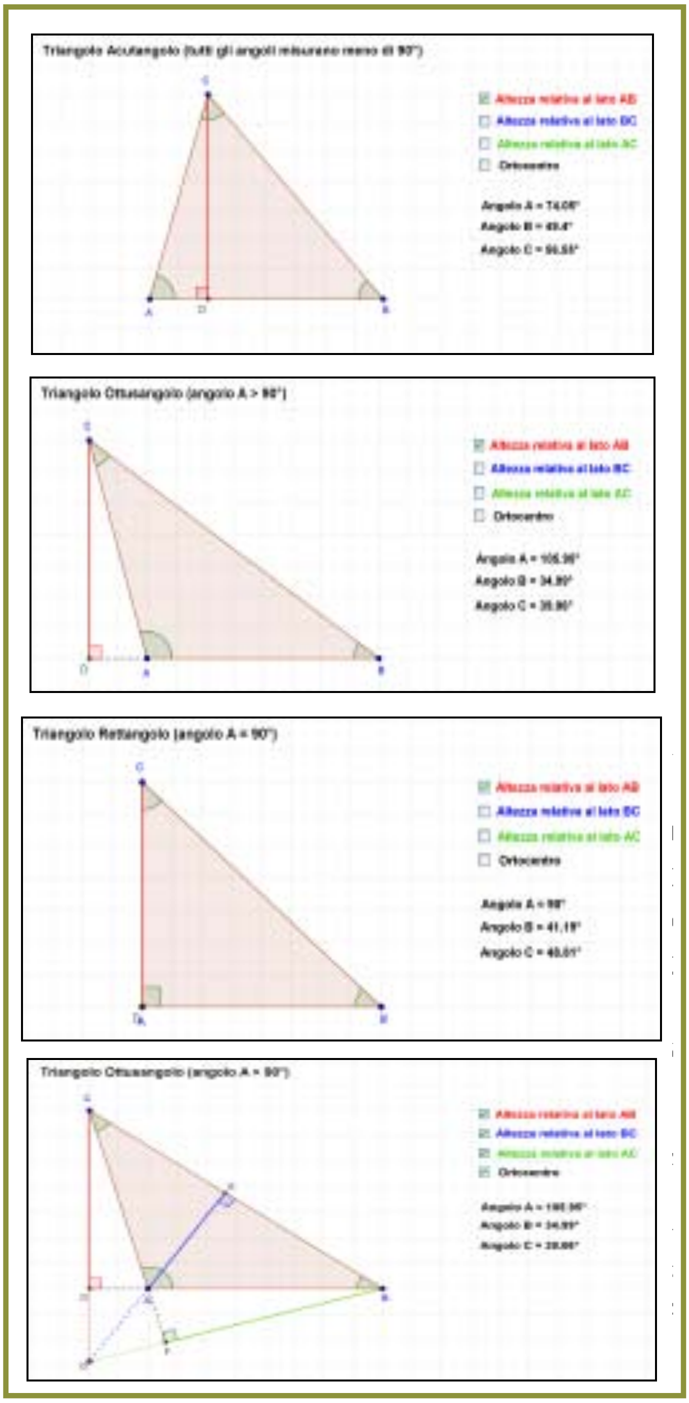


Fig. 9

Caccia al tesoro

Nella fase dell'orientamento libero gli allievi sono stati impegnati in compiti più complessi e meno familiari rispetto ai precedenti, che possono essere affrontati e risolti in modi differenti. L'alunno deve fare ricorso alle sue conoscenze e alla rete di relazioni che si è costruita per trovare una sua strategia per risolvere il problema. Si riporta di seguito una delle attività svolte.

Agli alunni (fig.10) è stato posto il seguente problema:

Luca, Silvia e Giulio hanno ritrovato in soffitta una vecchia mappa sulla quale il pirata Barbanera aveva annotato il luogo in cui era stato sepolto il suo tesoro.

"Il tesoro è stato sepolto sull'isola di Mathland. Nei pressi della vecchia torre troverai un tronco d'albero. A 25 metri da esso spunta una roccia. Il tesoro è stato sepolto ad una distanza di 20 metri dal tronco (punto A) e di 28 metri dalla roccia (punto B)."

Dove può essere sepolto il tesoro?

Fig. 10

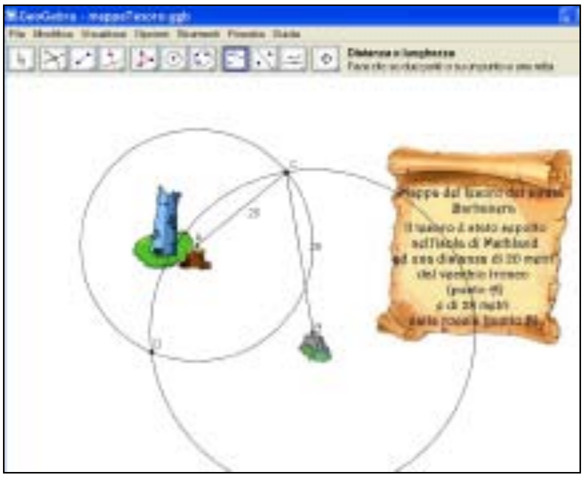


Fig. 11

In un primo momento gli alunni procedono per tentativi. Inseriscono un punto P e lo trascinano cercando di posizionarlo in modo da soddisfare le condizioni richieste. Ma questa strategia si dimostra abbastanza difficoltosa e non permette di individuare in modo esatto il punto dove è stato seppellito il tesoro. L'insegnante chiede agli alunni di trovare un metodo più semplice per individuare esattamente il punto. Gli alunni discutendo tra loro si rendono ben presto conto che i tre punti costituiscono i vertici di un triangolo (fig. 11) con i lati assegnati e procedono alla sua costruzione tracciando le due circonferenze per individuare il terzo vertice. Si rendono anche conto che la soluzione non è unica.

Queste attività aiutano gli allievi a sviluppare la capacità di "modellizzazione matematica". L'alunno deve tradurre un problema reale in un modello matematico, trovare la soluzione e valutare se essa è compatibile con il problema reale (fig. 12).

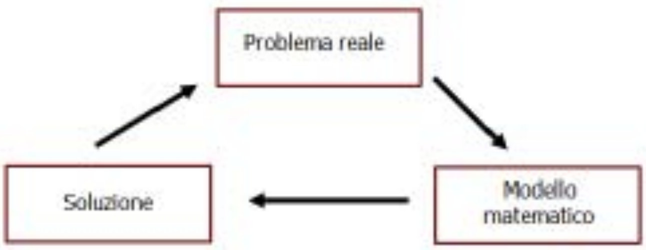


Fig. 12

Analisi dei risultati

Al termine delle attività è stato somministrato ai due gruppi un post-test finalizzato a verificare il livello di analisi di figure geometriche raggiunto e la capacità di argomentare circa la risposta fornita e/o la strategia adottata. Le domande (suddivise in 23 sub-item) erano centrate sui seguenti concetti geometrici:

- proprietà dei lati di un triangolo: sub-item 1,3,4,5;
- proprietà degli angoli di un triangolo: sub-item 2,3,4,6,7,8,9,10;
- altezze di un triangolo: sub-item 11, 16, 18;
- mediane: sub-item12, 19,21, 22, 23;
- bisettrici: sub-item 13, 17;
- assi: sub-item 14,15, 20;

Nella tabella 4 si riportano i risultati dell'analisi descrittiva. L'elaborazione dei dati è stata effettuata considerando i punteggi conseguiti nell'area delle conoscenze (ACn, 8 sub-item) e nell'area delle competenze (ACp, 15 sub-item).

	GS		GC	
	Media	Dev	Media	Dev
ACn al post-test	6.55	1.24	6.10	1.39
ACp al post-test	8.85	2.02	1.53	2.48

Tab. 4

Nell'ACn i due gruppi non presentano sostanziali differenze. I valori delle medie e delle deviazioni standard sono sostanzialmente omogenei. È nell'ACp, in linea con le nostre ipotesi, che le differenze diventano significative oltre che rilevanti. Lo scarto tra le medie è pari a 7.33 punti, la dispersione dei punteggi del GC nettamente superiore al 50%.

A sostegno di questi risultati, quanto emerso dall'utilizzazione del test non parametrico di Mann-Whitney ha confermato l'efficacia della sperimentazione e corroborato le stesse ipotesi di ricerca (tabb. 5 e 6).

		Media dei ranghi	Somma dei ranghi
ACn	GS	44,13	1765,00
	GC	36,88	1475,00
ACp	GS	58,83	2353,00
	GC	22,17	887,00

Tab. 5

	Post-test	
	ACn	ACp
Mann-Whitney U	655,00	67,00
p	0.152	$p < 0,01$

Tab. 6

Se nell'ACn i risultati sono mediamente comparabili, nell'ACp le differenze sono evidenti e facilmente confrontabili. In sostanza, non si hanno differenze significative fra i due gruppi quando si tratta di affrontare problemi e situazioni di routine come, ad esempio, quando la figura è rappresentata nella posizione standard, riconoscere che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (item 2), calcolare un angolo del triangolo noti gli altri due (item 3), oppure individuare gli elementi di un triangolo (altezze, mediane, ecc.) (items 11-14).

Le differenze diventano rilevanti, spesso con scarti superiori al 50%, quando gli allievi devono affrontare situazioni che per essere risolte richiedono di saper analizzare gli elementi di una figura e riconoscere le proprietà, oppure quando è necessario mettere in atto nuove strategie risolutive utilizzando le conoscenze possedute. Alcuni esempi.

Nell'item 4 (fig. 13), si chiedeva di spiegare perché il triangolo rappresentato era impossibile. Hanno risposto correttamente il 77,3% degli allievi del GS e lo 0% degli allievi del GC.

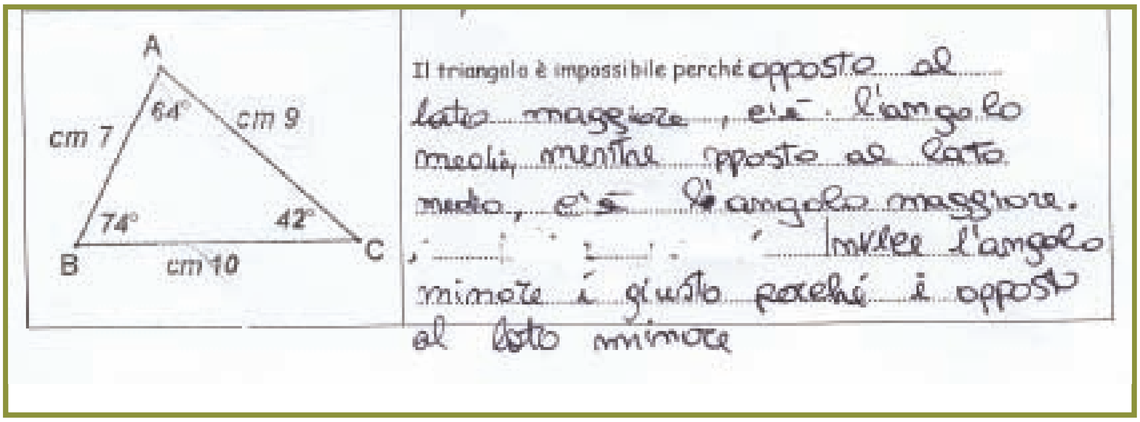


Fig. 13

Con il quesito 5 si poneva la seguente situazione problematica:

L'insegnante di matematica di Luca e di Silvia ha assegnato per casa il seguente esercizio:

Calcola il perimetro di un triangolo isoscele avente i lati di cm 10 e cm 4.

Luca ha calcolato il perimetro nel seguente modo: **P = 4 + 4 + 10 = 18 cm**
Invece Silvia ha calcolato il perimetro in questo modo: **P = 10 + 10 + 4 = 24 cm**

Secondo te chi ha risposto correttamente ?

Luca **Silvia** **Entrambi**

Spiega perché:...
...

Anche in questo caso, la differenza nelle percentuali di risposte corrette tra i due gruppi è stata rilevante: il 59% degli alunni del GS ha risposto in maniera corretta e nessun alunno del GC. Nella figura 14 è riportata la risposta data da un alunno del gruppo sperimentale.

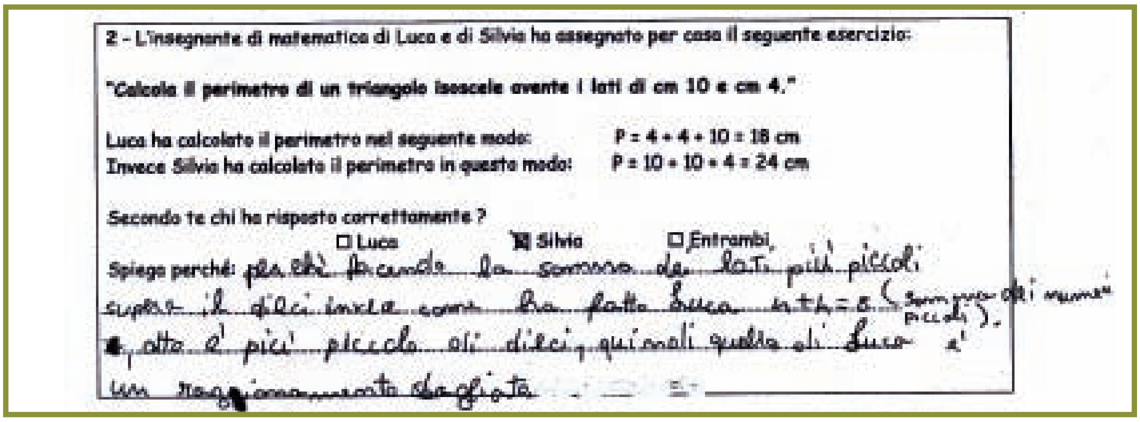


Fig. 14

Negli ultimi due quesiti gli alunni dovevano ricostruire un triangolo a partire da alcuni suoi elementi. Con l'item 23 si chiedeva di ricercare il terzo vertice di un triangolo noti gli altri due vertici e il baricentro. Nessun alunno del CG ha risposto correttamente, mentre il 27,3% dello SG è stato in grado di ricostruire il triangolo spiegando il procedimento seguito (fig. 15).

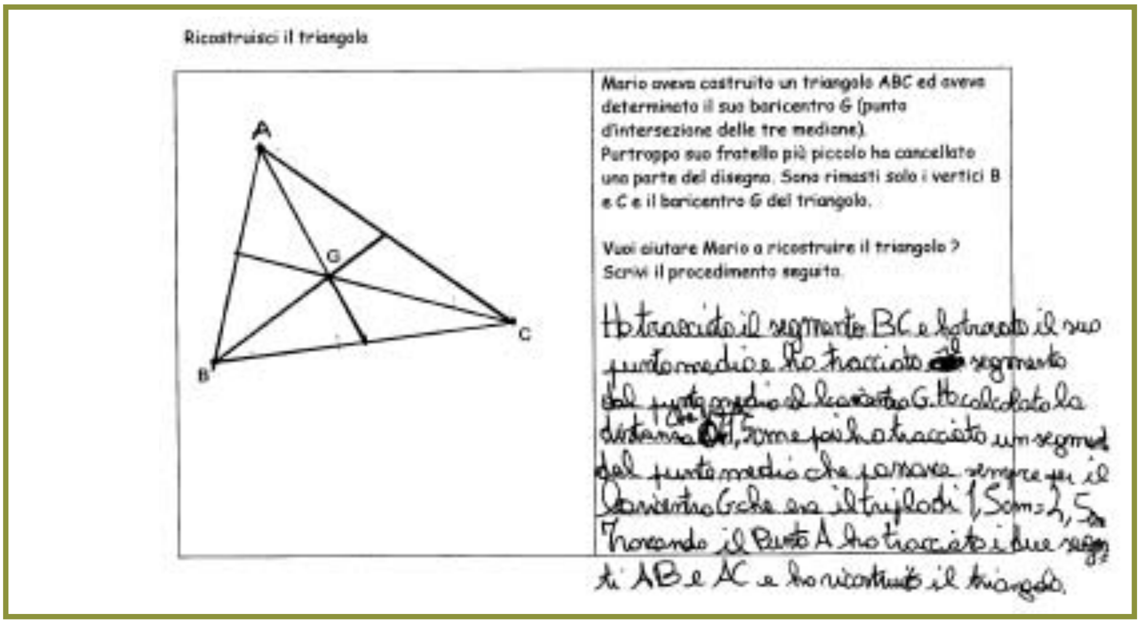


Fig. 15

I risultati conseguiti, per concludere, mostrano chiaramente i sensibili progressi ottenuti dagli alunni del GS, in linea con le ipotesi formulate. In tal senso e coerentemente con l'ipotesi di partenza, l'esame delle prestazioni del GC mostra un incremento non significativo nell'ACp. Non si hanno differenze sostanziali fra i due gruppi se si propongono problemi e situazioni di routine (ad esempio riconoscere che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, calcolare un angolo del triangolo noti gli altri due o individuare gli elementi di un triangolo). Le differenze diventano rilevanti quando gli allievi devono affrontare situazioni che per essere risolte richiedono di saper analizzare gli elementi di una figura e riconoscerne le proprietà, oppure quando è necessario mettere in atto nuove strategie risolutive utilizzando le conoscenze possedute.

Conclusioni

La strada della ricerca e dell'innovazione, delle prove e degli errori, costituisce lo sfondo e l'orizzonte di senso di una scuola intesa come organizzazione che matura, si sviluppa, apprende ed aiuta ad apprendere. Bisogna essere in grado, soprattutto, di coniugare il sapere, il saper fare e il saper essere: sapere cosa, sapere come e sapere chi. Bisogna "imparare a conoscere" e "imparare a fare", passando dal concetto di abilità a quello di competenza, ma soprattutto imparare ad essere scoprendo l'altro e cooperando per raggiungere obiettivi comuni. L'innovazione, se correttamente pianificata, "entra in ogni livello del quadro educativo, una grande gerarchia che si estende dalle scuola primarie alla ricerca, e nella quale la relazione tra insegnamento ed apprendimento funziona come la colla che lega tra loro i vari livelli di scuola" (Freudenthal, 1994).

In quest'ottica ci siamo orientati per attuare il percorso di sperimentazione che è stato fin qui descritto. Pur nei limiti oggettivi legati al numero di studenti coinvolti, ci sembra comunque di poter affermare che i risultati a cui siamo pervenuti possono fornire utili elementi di riflessione.

Appare evidente, analizzando le risposte fornite dagli studenti del gruppo di controllo, come la maggior parte degli errori sia dovuta alla mancata sistemazione di alcuni nodi concettuali come, ad esempio, la perpendicolarità, l'angolo, le relazioni fra lati e angoli di un triangolo. Di certo possiamo affermare che, almeno in questo caso, sono mancate esperienze significative basate sull'esplorazione e sull'analisi delle figure geometriche.

Le attività didattiche di geometria *tradizionali*, basate soprattutto sulla lezione frontale, sulla costruzione geometrica con carta e matita e sul calcolo di lunghezze, angoli o perimetri in contesti poco significativi sembrano non favorire l'acquisizione dei concetti fondamentali. Anzi, abbiamo osservato come molti misconcetti presenti all'inizio del corso permangono in percentuale non insignificante anche alla fine.

Al contrario, la metodologia adottata e il percorso seguito dal gruppo sperimentale ha condotto gli allievi a ricostruire e riorganizzare le conoscenze geometriche fondamentali, rimuovendo gli ostacoli e i misconcetti emersi nella fase iniziale. L'esplorazione dinamica delle figure geometriche guidata dalle schede ha fatto maturare negli alunni una maggiore capacità di osservazione abituandoli a focalizzare l'attenzione sulle proprietà, contribuendo in tal modo a dare il giusto significato ai concetti geometrici.

L'utilizzo di schede guidate spinge gli alunni ad analizzare le caratteristiche *visive* del triangolo e a stabilire relazioni fra i vari componenti delle sue parti. Queste attività sono essenziali per progredire verso il *Livello 1*, il livello di analisi nella gerarchia di van Hiele, e contribuisce alla costruzione di una rete concettuale sui triangoli e allo sviluppo del *pensiero geometrico*.

Va rimarcato, tuttavia, che i risultati positivi conseguiti non vanno attribuiti al semplice utilizzo dell'applicativo *Triangoli* ma piuttosto all'impianto metodologico utilizzato. L'interazione con figure dinamiche, infatti, avvia certamente gli allievi all'esplorazione e alla scoperta delle proprietà geometriche, ma il software da solo non garantisce il passaggio a livelli più alti di pensiero geometrico.

Un ruolo decisivo hanno giocato la scansione delle attività sulla base delle fasi di apprendimento di van Hiele, il cooperative learning, le frequenti discussioni sulla condivisione delle esperienze, così come la presentazione agli alunni di problemi geometrici situati in concreti contesti di vita quotidiana.

Riferimenti bibliografici

Bartolini Bussi M. G., Boni M. & Ferri F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Rapporto tecnico n. 21 NRD di Modena, Modena: Comune di Modena.

Batini M., Cannizzaro L., Cavallaro B., De Santis C., Lombardi V., Meneghini M., Precario L. (2004). *Figure geometriche e definizioni*, Quaderni di ricerca, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.

Cannizzaro L., Menghimi M. (2006). Il pensiero geometrico dalla conoscenza percettiva alla conoscenza razionale. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *29 B.* Paderno del Grappa: Centro Morin.

Castelnuovo E. (2009). *L'officina matematica*. Molfetta: Edizioni La Meridiana.

Clements D. H., Battista M. T., Sarama J., Swaminathan S. (1997). Development of students' spatial thinking in a unit on geometric motions and area. In *The Elementary School Journal, 98* (2), pp. 171-186.

Clements D. H., Battista M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.

De Lange J. (1987). *Mathematics. Insight and meaning*. Utrecht: OW & OC.

De Lange J. (2001). The P in PME: progress and problems in mathematics education. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, *1*, pp. 3-4.

Freudenthal H. (1994). *Ripensando l'educazione matematica*-Brescia: La Scuola, p. 213.

Gallo E. (1997). Continuità e discontinuità nella costruzione delle conoscenze geometriche. In *Notiziario U.M.I.*, *24* (supplemento al n. 7).

Fuys D., Geddes D. & Tischler R. (1984). *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele,* School of Education. New York: Brooklyn College.

Fuys Geddes & Tischler (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. In *Journal for Research in Mathematics Education Monographs, 3*.

Gallo E. (1997). Continuità e discontinuità nella costruzione delle conoscenze geometriche. In *Notiziario U.M.I.*, *24* (Supplemento al n. 7).

Malara N. A. (1995). L'insegnamento della geometria nella scuola media: questioni teoriche e didattico-metodologiche. In *L'insegnamento della geometria*, quaderno 19/1 del M.P.I.

McBurney D. H. (2001). *Metodologia della ricerca in psicologia*. Bologna: Il Mulino.

Olivero F. (1999). Cabri-géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. In W. Maull & J. Sharp (Eds), *Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, University of Plymouth.

Speranza F. (1996). Il triangolo qualunque è un qualunque triangolo? *L'Educazione matematica*, *1* (1), pp. 13-28.

Usiskin Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry, Final report of the cognitive development and achievement in secondary school geometry Project*, University of Chicago: Department of Education.

van Hiele P. M., Van Hiele-Geldof D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry*. Groningen: J. B. Wolters.

van Hiele P. M. (1959). Development and the learning process. *Acta Paedogogica Ultrajectina*.

van Hiele P. M. (1973). *Begrip en inzicht. purmerend*. Purmerend: Muusses.

van Hiele P. M. (1980). *Levels of thinking, how to meet them. how to avoid them*. Paper presented at the presession meeting of the Special Interest Group for Research in Mathematics Education. Seattle National Council of Teachers of Mathematics.

van Hiele P. M. (1984). A child's thought and geometry. In Fuys D., Geddes D., Tischler R. (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele*. Brooklyn: Brooklyn College.

van Hiele P. M. (1985). *Structure and insight: a theory of mathematics education*. New York: Academic Press.

van Hiele P. M. (1987). *Finding levels in geometry by using the levels in arithmetic*. Paper presented at the Conference on Learning and Teaching Geometry. Syracuse: Syracuse University.