

## Dialogo tra Didattica della Matematica e Didattica Generale: problemi e sinergie

Eleonora Faggiano • Università di Bari Aldo Moro, eleonora.faggiano@uniba.it  
Michele Giuliano Fiorentino • Università di Bari Aldo Moro, michele.fiorentino@uniba.it  
Antonella Montone • Università di Bari Aldo Moro, antonella.montone@uniba.it  
Michele Pertichino • Università di Bari Aldo Moro, michele.pertichino@uniba.it  
Pier Giuseppe Rossi • Università di Macerata, pgrassi.unimc@gmail.com

## Dialogue between Mathematics Education and Education: problems and synergies

The didactic action is an holistic process in which general didactic (GD) and disciplinary didactic (DD) interact. But, how are they related? Two different modes occurred in the past: distinguishing between knowledge and education or removing one of the poles. This work attempts to overcome these two opposite solutions. The two discipline, GD and DD, impact on the same didactic action and each of them acts on the same aspects, although with different perspective. This synergy allows a plural analysis otherwise flawed. In order to gather problems and synergies of a plural analysis, this work analyzes a research project, concerning a math teaching sequence for Primary School pupils, which involved researchers of the two disciplinary areas (GD and DD).

**Keywords:** Didactic mediation, semiotic mediation, co-disciplinarity, video-analysis, multimodality, plural analysis

L'azione didattica è un processo olistico in cui interagiscono la didattica generale (DG) e le didattiche disciplinari (DD). Ma come si relazionano? Nel passato sono emersi due modelli: separando l'intervento tra saperi ed educazioni o eliminando uno dei due poli. Il lavoro che presentiamo cerca di superare i due opposti modelli. Le due discipline, DG e DD, impattano sulla stessa azione didattica e ciascuna interviene su tutti gli aspetti, ma con prospettive differenti. Tale sinergia permette un'analisi plurale che altrimenti sarebbe zoppa. Per cogliere i problemi e le sinergie di un'analisi plurale, il contributo analizza la ricerca relativa a un percorso di didattica della matematica per la Scuola Primaria al cui sviluppo hanno partecipato ricercatori dei due settori disciplinari.

**Parole chiave:** Mediazione didattica, mediazione semiotica, co-disciplinarietà, video-analisi, multimodalità, analisi plurale.

255

Riflessione epistemologica e costruzione dei saperi

# Dialogo tra Didattica della Matematica e Didattica Generale: problemi e sinergie

## Introduzione

L'azione didattica è un processo olistico che vede molti fili intrecciati. Sulla sua struttura sicuramente due discipline tra le altre sembrano intervenire: la didattica generale e le didattiche disciplinari. Sono discipline, per molti versi, vicine e non sempre è facile separare i rispettivi campi di pertinenza.

Sicuramente diversa è la formazione all'origine delle due tipologie di ricercatori, gli uni con una matrice marcatamente disciplinare, che li rende più consapevoli dei nodi epistemologici, gli altri con una preparazione più filosofica e umanistica.

Nel passato sono emersi due modelli tra loro opposti per descrivere la relazione tra le due discipline: o separando il settore di intervento tra saperi ed educazioni, o eliminando uno dei due poli, o le didattiche disciplinari comprese nella didattica generale in quanto si riteneva che le problematiche principali fossero trasversali a tutte le discipline, oppure ritenendo che la didattica può essere solo disciplinare.

Il lavoro che presentiamo cerca di superare le due precedenti e opposte soluzioni. Le due discipline, didattica generale (DG) e didattica disciplinare (DD), impattano sulla stessa azione didattica e ciascuna interviene su tutti gli aspetti. Non è possibile separare i campi di intervento, ad esempio tra saperi, relazioni e competenze trasversali. E questo oggi più di ieri, come si argomenterà. Così come non è possibile gerarchizzare le tematiche.

L'ipotesi che sosteniamo è che i vari ricercatori posseggono differenti conoscenze e competenze con cui osservano e offrono soluzioni per la stessa azione didattica, come se guardassero lo stesso oggetto da una prospettiva diversa. La sinergia tra le diverse riflessioni e soluzioni arricchisce l'azione didattica e permette un'analisi plurale a tutto tondo.

L'interazione tra le due discipline non può avvenire in astratto, ma si reifica nella progettazione, realizzazione, osservazione, monitoraggio e riflessione di specifici percorsi didattici.

Per analizzare i problemi e le sinergie di un'analisi plurale, ovvero effettuata da ricercatori appartenenti a DD e DG, il contributo analizza la ricerca relativa a un percorso di didattica della matematica sulle simmetrie assiali effettuato in diverse classi quarte della Scuola Primaria a cui hanno partecipato ricercatori appartenenti ai due settori disciplinari. La presenza delle due diverse prospettive ha modificato le variabili di ricerca, i processi della procedura sperimentata (ovvero la procedura didattica seguita in classe per mettere in atto il percorso didattico sulla simmetria assiale), la metodologia sperimentale (ovvero la procedura di ricerca per analizzare e valutare il percorso di analisi plurale).



## Quadro teorico

L'interazione tra differenti discipline è un tema ampiamente discusso in letteratura. Agli estremi si pongono le posizioni di chi crede possibile un percorso interdisciplinare in cui i ricercatori di differenti discipline collaborano alla pari e di chi sostiene l'impossibilità di comunicazione tra ricercatori con epistemologie differenti. La prima posizione, sposata tra gli altri da Ardoino (1990, 1993, 1996), sostiene la possibilità di un ricercatore poliglotta. Afferma Ardoino:

Dans le cas d'une équipe de recherche, on conçoit sans peine qu'un groupe interdisciplinaire ait plus de chances, que des chercheurs opérant individuellement, de multiplier des éclairages en maintenant les niveaux de chacune des compétences spécialisées voulues par une telle approche. Mais encore faut-il que ces chercheurs ne se trouvent pas simplement juxtaposés. Même convenablement organisés par un projet commun de recherche, ils doivent encore se montrer suffisamment polyglottes pour pouvoir effectivement comprendre et parler, un peu, eux-mêmes, les langages disciplinaires de leurs autres coéquipiers. Sinon, on en resterait à l'état du manteau d'Arlequin (1992).

L'autore, allievo di Morin, riprende il concetto di complessità e sottolinea che un oggetto di ricerca nel campo delle scienze umane debba essere rappresentato come "métissés" e può permettere a ricercatori di differenti discipline di costruire un référentielle comune anche se, precisa, non potrà contenere tutte le caratteristiche delle singole discipline. Anche Barbier parla di ricercatore poliglotta e sottolinea:

Ogni prospettiva richiede una lettura plurale, un certo poliglottismo in scienze antropo-sociali. Ogni disciplina è connessa alle altre in funzione del proprio apporto euristico e di ciò che potrebbe essere definito come "punto di rottura", ovvero il punto di indagine a partire dal quale una disciplina non riesce più ad assegnare senso all'oggetto d'indagine (1994).

Si spinge oltre Terrisse che propone la trans-disciplinarietà:

C'est l'étude d'un problème ou d'un objet par des spécialistes de diverses disciplines qui transcendent leurs réflexions au-delà de leurs domaines respectifs et des points de rencontre de ceux-ci en visant la fusion des savoirs et des méthodes, favorisant ainsi l'émergence d'une nouvelle discipline englobant et dépassant les disciplines constitutives (1997).

Di diversa opinione sono Widlöcher (1998) e, poi, Blanchard-Laville (2000), la quale sostiene come l'inter-disciplinarietà sia un sogno e precisa:

Mon expérience me prouve que ce rêve est très difficile à accomplir mais que, à partir de conditions appropriées, il est possible d'inventer un mode de travail qui pousse l'interdisciplinarité au maximum des possibilités de son fonctionnement: c'est ce que nous nommons la co-disciplinarité (2000, 56).

Blanchard-Laville critica i termini di «fusion des savoirs» e di «discipline englobante», utilizzati da Terrisse, in quanto sono fonte di grande confusione. E afferma:



Ainsi, c'est pour rendre compte au plus près de notre propre style de fonctionnement et pour en désigner la caractéristique forte, que nous avons eu envie de proposer ce vocable : la co-disciplinarité. Si nous recourons à l'étymologie, nous notons que le préfixe « co » renvoie à « cum » qui signifie « avec », et qu'ainsi ce préfixe apparaît plus adéquat pour qualifier ce style de travail que le préfixe « inter » (entre) contenu dans interdisciplinaire (7). En effet, plus que d'un tissage de liens entre les disciplines convoquées, il s'agit d'évoquer une co-construction de sens à propos d'un même objet d'étude.

Alla base del lavoro comune, cioè alla base della rete che garantisce la condivisione di un lavoro e di un obiettivo, vi è la presenza di un "groupe psychique" ed è questo gruppo che può porsi l'obiettivo di co-pensare ovvero:

pour désigner un espace dans lequel « nous ne pensons pas nécessairement la même chose mais où la même chose nous fait penser » et où, en pensant à ce que cette chose nous fait penser, il y a « des chances que communiquer à l'autre ce que je pense le fasse penser d'une manière qui éclaire et enrichit sa propre vie psychique



come afferma Daniel Widlôcher (1998) per il quale «co-pensée ne signifie pas identité, mais transfert de pensée».

Blanchard-Laville conclude dicendo:

lorsque nous effectuons un travail co-disciplinaire sur un même corpus, nous nous trouvons en présence d'hypothèses interprétatives différentes, quelquefois contradictoires, dont les valeurs de vérité sont liées à la cohérence argumentative de chaque paradigme et où rien ne permet de trancher entre elles. Ainsi, il est fait appel à la capacité de tolérer l'ambiguïté de tous les chercheurs du groupe (2000, 63).

Quindi non identità, ma una cooperazione che rispetti i diversi paradigmi:

La codisciplinarité ne résulte pas d'une simple juxtaposition d'approches, mais de la construction d'une coopération entre chercheuses et chercheurs, respectueuse des paradigmes interprétatifs de chacun, et qui développe une éthique particulière de la relation des chercheurs aux sujets-objets de recherche (Blanchard-Laville C. et al., 2007).

In una direzione simile si muovono Plaisance e Vergnaud (2001) che sottolineano come nel campo delle scienze dell'educazione dalla multi-disciplinarietà sostenuta da Mialaret negli anni '60, alla multi-referenzialità di Ardoino si sia giunti alla co-disciplinarietà, al cui centro vi è il progetto d'azione, in cui è la pratica a permettere un dialogo tra diverse epistemologie senza ridurre la differenza: "L'uso del plurale diviene allora importante, non solo per affermare la diversità delle scienze dell'educazione, ma soprattutto la specificità di ciascuna di esse" (Plaisance e Vergnaud, 2001, 26).

Il framework della co-disciplinarietà sembra al meglio descrivere il lavoro presentato in questo articolo, dove ricercatori di diverse discipline, nello specifico di DD e di DG, hanno lavorato insieme per analizzare gli stessi materiali, ovvero video-registrazioni di attività didattiche, pur essendo partiti dall'utilizzare paradigmi di riferimento diversi.

Per l'analisi delle pratiche didattiche Vinatier e Altet (2008) parlano esplicita-

mente di analisi plurale a cui partecipano vari ricercatori appartenenti alle scienze dell'educazione. Tale approccio deriva dalla tradizione francese iniziata da Mialaret che per primo parla appunto di Scienze dell'educazione negli anni '60 del secolo scorso, anche se, come detto, in una prospettiva multi-disciplinare. Anche le autrici criticano Arduino (ivi, 15) e l'ipotesi che un'analisi multi-referenziale possa essere effettuata da un solo ricercatore poliglotta. Propongono l'analisi plurale a partire da approcci disciplinari "croisés" in un lavoro interattivo situato. "Tale lavoro è condotto da differenti ricercatori appartenenti a discipline differenti delle scienze dell'educazione, che analizzano sequenze di insegnamento-apprendimento video-registrate del college e della scuola primaria" (ivi, 16).

"Il confronto consiste nel discutere gli approcci utilizzati cercando di focalizzare gli avvicinamenti potenziali, ma anche gli apporti specifici di ogni prospettiva in modo da costruire una problematica nuova accettata da tutti. Nell'analisi di una situazione di insegnamento-apprendimento caratterizzata dall'incertezza, dai vincoli, in cui sono presenti tensioni, interessi e logiche differenti, l'approccio plurale permette di individuare una questione chiave a partire dagli scambi tra i ricercatori: che cos'è che tiene insieme la gestione della situazione e del gruppo classe tra dinamiche relazionali e quelle connesse all'apprendimento? Come gli attori insieme (studenti e docenti) costruiscono una situazione che regge e permette l'apprendimento? Come i docenti regolano in situazione? L'analisi plurale individua i criteri di coesione (interna) e di coerenza (esterna) che sembrano richiesti. Essa mette in evidenza alcune condizioni che sembrano necessarie perché l'insegnante raggiunga gli obiettivi fissati. Il gruppo di ricerca si accorda sulla seguente spiegazione: il processo "tiene", la sequenza "avanza" per un sottile equilibrio di accordi e disaccordi, a partire dalla transazioni, dalle negoziazioni, dagli aggiustamenti tra gli attori. È la costruzione di tali condizioni determinate dagli attori che permette alla situazione di funzionare malgrado la presenza di elementi e logiche contraddittorie e può giungere a un equilibrio per regolazioni successive" (ivi, 16).

Le autrici poi sottolineano l'altra faccia della medaglia: la co-ricerca e il ruolo del ricercatore-insegnante nell'analisi delle pratiche, tema questo non al centro del presente lavoro.

## Domande di ricerca

Dai precedenti riferimenti teorici emergono alcune ipotesi sulla possibilità di interazione di ricercatori di differenti discipline:

- l'impossibilità di un ricercatore poliglotta;
- la necessità di un'analisi plurale;
- la realizzazione di un'analisi plurale non confrontando in astratto le relative teorie ma analizzando situazioni concrete;
- la non riduzione delle differenze in seguito all'analisi (ogni ricercatore lavora con la propria epistemologia e in essa trova la validazione delle proprie argomentazioni) che però non vanno lette come visioni opposte, ma come letture



da prospettive differenti. Esse permettono di fornire interpretazioni “incrociate” che forniscono descrizioni a tutto tondo della situazione e permettono di elaborare soluzioni complesse per le problematiche presenti.

Il lavoro qui presentato studia gli scambi tra ricercatori di DD, nello specifico Didattica della Matematica, e di DG che hanno analizzato delle sequenze didattiche relative a un percorso sulla simmetria assiale.

La domanda di ricerca a cui si è cercato di rispondere è la seguente:

- come ricercatori di differenti discipline e, quindi, con differenti epistemologie collaborano in una ricerca? come possono condividere alcuni risultati, pur non avendo un unico metodo e identici riferimenti teorici? quali i vantaggi, se esistono, dell’analisi plurale?

Il contributo racconta l’evolversi della relazione, i problemi incontrati, le domande di ricerca a cui sono state date risposte simili, quelle rimaste aperte o quelle che, a causa di una diversa prospettiva, hanno avuto una differente risposta.

## La metodologia della ricerca



La ricerca analizza il dialogo tra due prospettive nell’analisi di un percorso sperimentale sull’uso di artefatti, finalizzata alla costruzione del significato di simmetria assiale a livello di Scuola Primaria. Il lavoro sperimentale in classe è stato impostato e condotto dal gruppo di ricerca in Didattica della Matematica di Bari. L’inserimento di un ricercatore di DG, quando già la sperimentazione era al suo secondo anno, in primo luogo era diretto alla lettura critica dei risultati, ma poi ha determinato un ripensamento del percorso e una nuova fase della ricerca, che si è tradotta in una seconda sperimentazione in classe.

Il percorso presenta pertanto due processi di ricerca tra loro sovrapposti: la sperimentazione del percorso didattico sulle simmetrie assiali progettato dal gruppo di DD di Bari, la sperimentazione di un percorso di analisi plurale. In questa sede si analizza il secondo percorso. Per il primo si rimanda a Faggiano, Montone e Mariotti (2016) e Montone, Faggiano e Mariotti (2017).

Il percorso sperimentale si è sviluppato pertanto in più momenti e su più piani.

La prima fase, che ha coinvolto solo i ricercatori di DD, è stata dedicata al design della sequenza didattica, durante la quale si è deciso di utilizzare come artefatto digitale un quaderno interattivo in Ambiente di Geometria Dinamica (AGD), e di affiancare a questo un artefatto manipolativo, costituito da un foglio di carta e uno spillo. L’ipotesi di ricerca era di comprendere se e come l’uso sinergico di artefatti manipolativi e digitali impattasse sull’apprendimento (luglio 2015 - aprile 2016).

La seconda fase vede l’ingresso del ricercatore di DG (maggio 2016). Tale ingresso inizialmente era finalizzato alla presentazione della ricerca al XXXIV Seminario Nazionale organizzato dall’Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica (AIRDM) e si richiedeva al ricercatore di DG di svolgere la funzione di osservatore critico. Il dibattito avviato ha però evidenziato come fosse impossibile una relazione che non tenesse conto delle diversità epistemologiche tra le due aree e questo ha portato a ulteriori step che qui descriviamo per poi approfondirli nei successivi paragrafi. Pertanto la definizione delle domande di ricerca relative all’analisi plurale si è evoluta in contesto.

Per avviare l’interazione è stato necessario condividere un linguaggio mentre si analizzavano i filmati relativi alle attività effettuate. Tale condivisione ha richiesto che i ricercatori di DD descrivessero al ricercatore di DG i percorsi didattici e le

logiche con cui erano stati costruiti e che il ricercatore di DG comprendesse, almeno embrionalmente, i contenuti disciplinari sottesi. Si è proceduto poi al commento dei materiali video registrati fino a quel punto. L'analisi ha evidenziato alcuni elementi di tangenza, altri di distanza, ma ha anche portato a suggerire alcune modifiche della procedura didattica che hanno portato a una nuova sperimentazione.

La terza fase è stata caratterizzata dall'analisi dei video relativi alla nuova sperimentazione in classe.

Nell'ultima fase sono stati ripresi i materiali discussi, i dibattiti e le scelte da essi derivati, e a partire da ciò è stata effettuata una meta-analisi il cui fuoco è stato proprio la modalità di confronto tra le due aree. Tale meta-riflessione ha coinvolto ulteriori ricercatori presenti al Seminario Nazionale di AIRDM effettuato a Rimini dal 23 al 25 febbraio 2017. Sono state confrontate le analisi e a partire da esse i rispettivi framework teorici di riferimento. Sono state colte le sinergie nel rispetto delle differenti epistemologie e prospettive.

Lo strumento fondamentale per la ricerca è stata l'analisi dei video. Si partiva dall'analisi delle video sequenze e delle trascrizioni delle stesse e il dibattito sui framework teorici è avvenuto sempre in relazione ad esse. L'analisi dei video è stata svolta prima separatamente da ogni ricercatore che inseriva commenti alla trascrizione. In una seconda fase si condividevano i commenti degli altri ricercatori e nella fase finale si procedeva con un lavoro di sintesi in gruppo. La discussione ha portato in alcuni casi al cambiamento delle posizioni iniziali e al raggiungimento di interpretazioni condivise, in altri al mantenimento della differenza, ma cercando di comprendere la prospettiva all'origine della diversa analisi, spesso ugualmente valida per la comprensione della situazione didattica e comunque validata dalle rispettive epistemologie.



## Descrizione della sequenza didattica e della sperimentazione

Prima di descrivere il processo sperimentale relativo alla domanda di ricerca si ritiene utile descrivere la sperimentazione che riguarda le simmetrie assiali. Gli artefatti utilizzati, uno concreto/manipolativo e l'altro digitale, entrambi facenti riferimento a uno stesso contenuto matematico, sono stati scelti in funzione del quadro teorico utilizzato, quello della Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi e Mariotti, 2008; 2009) e delle ipotesi della ricerca. L'obiettivo era cogliere il ruolo della sinergia tra i due artefatti.

L'artefatto manipolativo consiste in un foglio di carta, su cui sono disegnati un punto e una retta. Lo studente doveva piegare il foglio lungo la retta e con uno spillo forare il foglio piegato in corrispondenza del punto, costruendo così il simmetrico. Questo artefatto permette in modo diretto di realizzare una simmetria assiale, perché il foglio modella il piano e la piega consente allo spillo di produrre due punti simmetrici corrispondenti.

L'artefatto digitale appare come una sequenza di pagine interattive, costruite con l'applicativo New Cabri (Cabrilog), che includono le consegne formulate, strumenti/pulsanti caratteristici degli AGD, tra cui quelli che consentono di costruire alcuni oggetti geometrici (punto, retta, segmento, punto medio, retta perpendicolare, punto di intersezione, circonferenza), lo strumento "Simmetria assiale", e lo strumento "Traccia" che, potenziando il ruolo assunto dalla funzione di trascinamento tipica degli AGD, consente di dedurre l'invarianza delle proprietà caratterizzanti le figure.

La progettazione della sperimentazione didattica è stata sviluppata sull'ipotesi fondamentale che l'uso combinato e reciprocamente alternato di artefatti manipolativi e digitali possa sviluppare una sinergia, a livello cognitivo, in grado di potenziare gli effetti di ciascuno dei due artefatti se utilizzati singolarmente. In seguito, in accordo con quanto previsto nella TMS, si è passati all'elaborazione della successione, costituita da sei cicli didattici. Elemento chiave della sequenza predisposta è stata la scelta, di alternare l'uso dei due artefatti.

La sequenza didattica è stata prima testata in 2 scuole della provincia di Bari, l'IC Don Bavarò-Marconi di Giovinazzo e l'IC Balilla-Imbriani di Bari, ed ha coinvolto gruppi di 4 studenti. I due percorsi sono stati effettuati da ottobre 2015 ad aprile 2016.

Dopo le interazioni tra ricercatori di DD e DG, avvenute a partire da maggio 2016, si è deciso di sperimentare lo stesso percorso in una classe, riproducendo tutte le problematiche che caratterizzano il lavoro in aula con gruppi numerosi di studenti e con una sola insegnante.

La sperimentazione ha coinvolto una ulteriore classe dell'IC Balilla-Imbriani di Bari, dal novembre 2016 al gennaio 2017.

I lavori anche in questa fase sono stati condotti dai ricercatori di DD e sono stati sempre video registrati con due videocamere, una posta verso la classe e l'altra verso la cattedra.



## La condivisione del linguaggio

### *La mediazione*

Appena la visione dei video ha preso avvio, è emersa la necessità di condividere il linguaggio ed esplicitare i framework teorici. Era necessario per il ricercatore di DG comprendere il percorso progettato e realizzato e le logiche con cui era stato effettuato.

I maggiori problemi sono emersi quando termini simili facevano supporre l'esistenza di analogie inesistenti. Tale problema è emerso immediatamente attorno al termine mediazione, centrale sia per i ricercatori di DD che per quelli di DG.

Per i primi, come detto, il riferimento teorico è la Teoria della Mediazione Semiotica [TMS] (Bartolini Bussi e Mariotti, 2008; 2009), per i secondi la teoria della Mediazione Didattica (Damiano, 2013).

Sviluppata in una prospettiva vygotskijana, la TMS prende in considerazione il sistema complesso di relazioni semiotiche tra gli elementi fondamentali che riguardano l'uso di artefatti nella costruzione di significati matematici: l'artefatto, il compito, il sapere matematico oggetto dell'attività, e i processi di insegnamento-apprendimento in classe. In accordo con tale teoria, idea fondamentale è che uno strumento, incorporando un sapere, possa offrire, a chi lo usa, una via di accesso proprio al sapere che in esso è incorporato (Vygotskij, 1980). Per cui un artefatto può essere visto in riferimento a un significato matematico e quindi come tale può diventare uno strumento di mediazione semiotica. L'aspetto principale della TMS riguarda il potenziale semiotico, ovvero il duplice legame dell'artefatto con il compito e con il sapere. Attraverso l'analisi del potenziale semiotico di un artefatto, è possibile descrivere ciò che ci si aspetta emerga in classe, in termini di azioni e di segni prodotti dagli studenti nell'affrontare il compito con l'artefatto. L'analisi del potenziale semiotico dell'artefatto costituisce una importante guida nell'analisi dei risultati dell'intervento didattico, in quanto fornisce, oltre che la base per la pro-

gettazione delle attività, anche il riferimento per l'analisi dei comportamenti degli allievi e dell'evoluzione dei segni nelle discussioni collettive. Durante il processo di costruzione e condivisione dei significati è possibile identificare delle catene semiotiche descritte dalla produzione e dalla concatenazione di diversi tipi di segni: i "segni artefatto", i "segni matematici" e i "segni pivot". I primi si riferiscono al contesto d'uso dell'artefatto e contengono il riferimento ad azioni che vengono fisicamente compiute nel corso del suo utilizzo. L'obiettivo dell'insegnamento è promuovere l'evoluzione dei segni da "segni artefatto" a "segni matematici", legati ai significati, riconosciuti come tali dalla cultura matematica. Un ruolo cruciale è giocato dai "segni pivot", cioè quei segni che favoriscono, attraverso il legame di significato, il passaggio dal contesto dell'artefatto al contesto matematico.

La Mediazione didattica parte dall'impossibilità di una relazione deterministica tra insegnamento e apprendimento. Di qui l'esigenza di un percorso di mediazione che permetta di coniugare il mondo di chi apprende, le sue esperienze, le sue conoscenze, con il mondo di chi insegna in un processo interattivo che sviluppa la traiettoria identitaria personale e professionale del discente/dei discenti e la traiettoria identitaria personale e professionale di chi insegna. Tale mediazione avviene all'interno dei dispositivi didattici. La teoria della Mediazione didattica deriva dalle ricerche dei disciplinari francesi sulla trasposizione (Chevallard, 1991; Develay, 1993), oggi riviste e re-intepretate dalla ricerca sulla didattica delle scienze in ambito tedesco da Duit et al. (2012) che parlano di ricostruzione didattica. Altro riferimento sono le ricerche di Hussayé sul triangolo didattico (1988), poi riprese da una diversa angolazione da Rezeau (2004).

Il dibattito nel gruppo<sup>1</sup> sul termine Mediazione ha seguito varie fasi. Si è partiti dal piacere di avere un concetto in comune, ma appena si è approfondito il confronto si è colta la profonda differenza dei significati che lo stesso termine aveva nei due territori. Il passaggio successivo è stato quello di esplicitare alcune problematiche alla base delle due teorie, ad esempio quella della dialettica tra insegnamento e apprendimento e quella della distanza tra sapere quotidiano e sapere scientifico e del ruolo dei pari e degli esperti per superare tale distanza, già ampiamente focalizzato da Vygotskij. In questa seconda fase è stato determinante cogliere le differenze e le specificità dei due modelli.

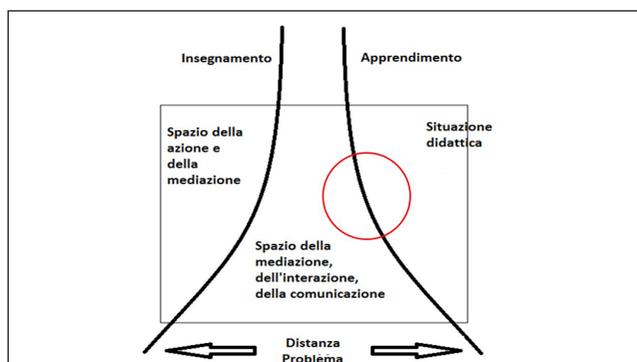


Fig. 1 - Allineamento

1 Il dibattito ha coinvolto anche altri ricercatori e nel gennaio 2017 è stato realizzato a Bari un seminario sulla mediazione che ha coinvolto Maria Alessandra Mariotti e alcuni ricercatori di didattica generale di Bari.

Solo dopo un'approfondita analisi dei due modelli e, soprattutto nella fase finale grazie all'applicazione dei due modelli all'analisi dei materiali video, si è arrivati a cogliere la sinergia tra le due teorie. Esse forniscono una diversa, ma parallela, lettura degli stessi percorsi ed evidenziano processi presenti che si sviluppano sin-cronicamente.

Un primo processo riguarda il sapere disciplinare che a partire da un linguaggio comune, quello della vita di tutti i giorni, arriva alla costruzione di un significato "matematico". In questo caso centrale è la coerenza tra quanto verbalizzano gli studenti e il sapere scientifico. Per la TMS, come detto, l'obiettivo dell'insegnamento è promuovere l'evoluzione dei segni, grazie alla mediazione degli artefatti.

Il secondo analizza il processo che a partire dall'esperienza personale del/dei soggetto/i procede verso la costruzione situata e personale di conoscenza, supportata dal confronto con l'esperto e con i pari e dalla presenza di mediatori didattici. Il processo avviene nel dispositivo in cui le traiettorie dei discenti e del docente si allineano (Fig. 1) e si sviluppano mentre cresce la consapevolezza del soggetto del proprio percorso (Rossi, 2016).

Se nel primo processo si analizza l'evolvere delle verbalizzazioni e la loro **coerenza esterna** con il sapere matematico, nel secondo caso l'attenzione si focalizza sulla **continuità** della traiettoria del singolo soggetto e sulla **coesione interna** delle traiettorie della classe che si sviluppano attraverso regolazioni che avvengono nel dispositivo didattico (Laurillard, 2014). I due processi si sviluppano contemporaneamente nei piani epistemologico, pedagogico, didattico e valoriale.

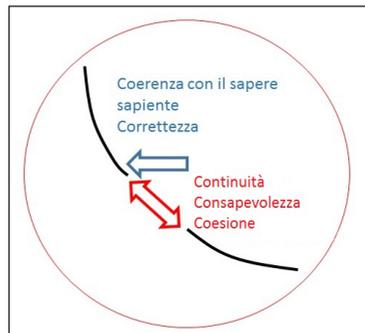


Fig. 2 - I due processi sinergici

La co-presenza dei due processi (coerenza esterna e continuità/coesione interna) assume un'importanza focale nel contesto attuale dove la scuola si trova a fare i conti con conoscenze ampie, variegate e frammentate possedute dagli studenti, conoscenze non sempre validate, ma con cui comunque la scuola deve fare i conti, e con il ruolo che nella società della conoscenza assume la capacità per ogni professionista di sviluppare e di curare la propria traiettoria personale e professionale.

### *La coerenza esterna e la coesione interna*

La prima fase della sperimentazione aveva coinvolto gruppi di due o quattro studenti ed era determinata dall'attenzione dei docenti di DD di comprendere la logica e la completezza del percorso per l'insegnamento della simmetria assiale. L'interazione era avvenuta in un ambiente esterno alla classe dove non erano presenti le dinamiche comuni al gruppo classe. L'attenzione alla coesione interna, pro-

pria dei ricercatori di DG, è stata alla base della decisione condivisa da tutto il gruppo di procedere a una nuova fase di sperimentazione. La domanda posta dal ricercatore di DG è stata: come cambia il processo se il percorso si attua in classe ed è condotto dall'insegnante? Il gruppo ha fatto propria la sfida. I risultati della successiva sperimentazione sono stati significativi e per larga misura imprevisi. Se la sperimentazione fuori della classe con due/quattro studenti può essere descritta come un processo lineare e diacronico; la sperimentazione in classe vede invece un processo ridondante (si ripetono gli stessi passaggi anche se in un percorso a spirale) e sincronico in cui le interazioni reciproche permettono anche di anticipare e accelerare alcuni passaggi. Molti sono ad esempio gli episodi di catchment in cui una frase o un gesto di un alunno è ripreso e rilanciato da altri. Inoltre differente è la gestione del tempo (imprevisi, disturbi, ritardi, assenze) e non sono stati effettuati tutti gli step previsti nella sequenza progettata, anche se quanto effettuato ha permesso di raggiungere gli obiettivi attesi.

In altri termini i due percorsi pur basati sulla stessa idea progettuale e sugli stessi nodi epistemologici si sono svolti in modo differente. Altra riflessione: come il processo sarebbe cambiato se fosse stato eseguito da un docente e non da un ricercatore: quali competenze dovrebbe avere? Come si modifica il processo? Quali segni pivot avrebbe evidenziato? Da cui: come formare gli insegnanti? Ma di questo si discuterà in un successivo contributo.



### *L'artefatto*

Un secondo ambito di discussione teorica è stato quello sul concetto di artefatto.

In questo caso alcuni elementi condivisi provenivano dal riferimento comune a Rabardel e dalla condivisione della relazione tra artefatto e strumento. Una possibile analogia può essere trovata tra il concetto di artefatto nella TMS e il concetto di mediatore didattico nella mediazione didattica (Damiano, 2013). In realtà anche in questo caso le differenze sono significative. In un caso l'attenzione si focalizza sull'artefatto e sul suo potenziale semiotico, come precedentemente detto. Per Damiano il mediatore più che con artefatto fa rima con dispositivo (Foucault, 1975) e racchiude non solo le caratteristiche degli oggetti coinvolti, ma anche le procedure, l'ambiente e le relazioni che si instaurano nel percorso didattico caratterizzato dalla tipologia del mediatore.

Vi è però un'interessante sinergia nel ruolo dell'artefatto, in riferimento alla potenzialità dell'artefatto di far emergere segni pivot, che hanno la funzione di ponte tra sapere comune e sapere scientifico e il ruolo di boundary object del mediatore tra esperienza e concettualizzazione nei processi didattici.

Si è dibattuto a lungo se si dovesse definire virtuale o digitale l'artefatto, così come sulla relazione tra azione e consapevolezza durante l'utilizzo dell'artefatto digitale. Un esempio evidenzia la differente analisi. Per costruire il punto simmetrico di un punto dato rispetto ad una retta con l'artefatto digitale occorre premere il pulsante simmetria e poi il punto dato e la retta. Per i ricercatori di DD, la procedura permetteva di cogliere il legame tra punto simmetrico, punto dato e retta. Per il ricercatore di DG, il legame tra la pressione del bottone e l'azione non aveva nessuna analogia con l'azione di costruire un simmetrico ed era un legame basato su convenzione. La contraddizione solo in parte è stata risolta analizzando i gesti effettuati dagli studenti mentre raccontano il processo, ma non del tutto, in quanto troppo legata anche ad aspetti emotivi (la progettazione dell'artefatto, il significato matematico di alcune procedure).

L'esplorazione teorica ha anche incontrato territori comuni imprevedibili e imprevisibili, che dipendevano dalla specifica storia dei ricercatori connessi e dal loro approccio, ed erano indipendenti dall'appartenenza disciplinare.

Due elementi in particolare. Il primo, l'approccio alla ricerca basato sull'analisi qualitativa dei video e l'importanza assegnata alle trascrizioni dei dialoghi. Il modello di ricerca è quello dell'analisi qualitativa delle sequenze didattiche (Vinatier e Altet, 2008; Altet, 2013; Goldman et al., 2008) che in campo didattico si connette con quello delle ricerche di Sherin e van Es (2009), Santagata e Guarino (2011), Seidel e Sturmer (2014) sull'uso dei video nella formazione alla professionalità docenti. L'interesse per i video nasce dalla necessità di cogliere l'aspetto olistico dell'azione didattica.

Il secondo aspetto è relativo allo sguardo multimodale. Per multimodale si intende la sinergia di differenti linguaggi (il linguaggio parlato e scritto, il linguaggio del corpo, il linguaggio dei gesti) che si differenzia da un approccio a-modale tipico del cognitivismo, ma anche da approcci mono-modalità. Centrale per un'analisi multimodale è il concetto di colla (Caruana e Borghi, 2016; Borghi e Binkofski, 2014) e quello di semiotic bundle (Arzarello et al., 2009). In questo caso, pertanto, è stato il comune riferimento teorico all'embodiment a garantire la sinergia nella ricerca.

In altri termini pur appartenendo a settori disciplinari differenti possono esistere riferimenti teorici comuni. Tale affinità facilita la ricerca co-disciplinare e in alcuni casi la rende possibile.

## La condivisione dell'analisi e la co-ricerca

Qui di seguito si presentano alcuni esempi tratti dall'analisi dei video per mostrare come si è proceduto nella sperimentazione.

Il primo presenta un'analisi in cui le prospettive differenti portano a una diversa analisi dello stesso episodio. In particolare si mostra come l'attenzione di entrambe le prospettive si sia focalizzata su uno stesso segno verbale, con interpretazioni differenti.

Dopo aver suggerito di trascinare il punto sullo schermo con l'artefatto digitale e aver osservato il conseguente spostamento del punto simmetrico, l'insegnante richiede di giustificare i comportamenti degli oggetti sullo schermo in seguito al trascinamento prima del punto d'origine A, poi della retta e infine del punto simmetrico C. Lo studente P. prende la parola e dice:

...è successo che noi, spingendo questo bottone e attivando la traccia del punto A per poi spostarlo, si vedeva che, spostando A, ci chiedeva sposta il punto A, e allora, spostando il punto A ci accorgevamo che si muoveva anche il punto C, facendo le stesse identiche cose di A, solo che si muoveva all'incontrario.

E poi continua:

se muovendo questa [con il mouse sposta il punto A con la sua traccia, avvicinandolo alla retta] si muoverebbe anche questa [la traccia del punto C] solo che andando all'incontrario... se questa [il punto A con la sua trac-



cia] visto che si sta avvicinando alla retta, se il punto C facesse le stesse identiche cose, si allontanerebbe dalla retta, quindi per fare, per avere la stessa posizione ed essere uguale a fare, ... uguale nel senso di fare le cose uguali al punto A, per stare sempre vicino alla retta allo stesso modo, con angolazioni uguali, quando A si avvicina, C si avvicina... deve fare gli stessi movimenti del punto A, soltanto al contrario.

Dal punto di vista della DD, l'analisi della discussione evidenzia l'emergere del potenziale semiotico dell'artefatto digitale e i primi elementi di sinergia tra gli artefatti. Quando P. interagisce con la configurazione sullo schermo, spostando A vede che la traccia del punto C è simmetrica alla traccia del punto A. La frase "C facendo le stesse identiche cose di A" è un segno pivot che rappresenta il comportamento del punto C, necessariamente uguale a quello del punto A, e quindi evoca l'idea di dipendenza del punto simmetrico C dal punto A. Inoltre P. utilizza il segno artefatto "all'incontrario" che dal punto di vista della matematica e secondo l'analisi fatta in ambito della DD, rimanda all'idea che la simmetria assiale sia una isometria indiretta. Si vede come l'effetto su C dello spostamento di A riesca a evocare l'idea di dipendenza di C da A. P. in questo suo monologo ad alta voce, argomenta con una serie di gesti, il suo punto di vista sulle relazioni che legano i due punti A e C.

L'affermazione "all'incontrario" di P. ha avuto una differente interpretazione per il ricercatore di Didattica Generale. Per comprendere l'affermazione "all'incontrario" può essere utile riprendere quanto sostengono Marton e Tsui ovvero che «l'insegnante deve scoprire le "condizioni specifiche" per ogni argomento del curriculum» che favoriscono l'apprendimento, e questo include «la conoscenza di ciò che gli studenti portano nello studio, cioè le loro competenze e la conoscenza precedenti» (Laurillard, 2014, 101). Per analizzare un concetto sono chiamati a distinguere il concetto in questione da altri più o meno affini. «È ciò a cui si riferisce Marton con l'espressione "architettura delle varianti" (Marton e Tsui, 2004). L'insegnante deve essere attento alla "architettura delle varianti" di un concetto, poiché gli studenti possono distinguere solo ciò che sono in grado di distinguere e "non possono farlo senza fare esperienza delle alternative"» (ibid, 105). Lo studente dicendo "all'incontrario" potrebbe intendere: all'incontrario da quanto mi aspetterei. Egli potrebbe pensare ad altre possibili relazioni tra due punti, ad esempio alla traslazione che è la relazione più comune, in cui (se riferita a un corpo rigido) se traslo un corpo lungo una retta lo spostamento del punto A in una direzione produce lo spostamento del punto B nella stessa direzione. In altri termini per capire cosa sia la simmetria sta utilizzando probabilmente altre possibili relazioni tra due punti di cui ha fatto esperienza. Come propone Marton (Variation Theory) e come suggerisce Laurillard l'architettura delle varianti è uno strumento efficace nei processi di apprendimento.

Nel caso su presentato, le due differenti interpretazioni, ritenute entrambi possibili e valide, permangono e non convergono a una interpretazione unica, ma entrambe arricchiscono l'interpretazione polisemantica di quanto discusso.

Si presenta ora un secondo esempio che offre invece un esempio di sinergia tra le due prospettive. L'episodio descritto si riferisce alla discussione al termine del secondo ciclo, strutturata in maniera condivisa tra DD e DG, con un'intera classe. I bambini stanno discutendo, sotto la guida dell'insegnante, delle relazioni tra gli oggetti presenti sulla LIM (una retta, asse di simmetria, un punto dato A e il punto ad esso simmetrico C, costruito utilizzando lo strumento/pulsante "Simmetria") e dell'effetto del trascinarsi di ciascuno degli oggetti sugli altri.

L'idea che comincia a emergere è che, come dice la studentessa S., "se tu sposti



il punto A si deve muovere pure il punto C perché deve rimanere la simmetria”. Interessante, per i gesti con cui accompagna le espressioni verbali, è l’intervento della studentessa M. L’importanza di riferirsi ai gesti, in accordo con la TMS, sta nel fatto che sono proprio questi segni che testimoniano chiaramente che i significati che emergono ed evolvono sinergicamente hanno la loro origine e restano legati alle azioni compiute con l’artefatto manipolativo e con l’artefatto digitale.

M. dice:

se muovi solo il punto A, il punto C si deve muovere con il punto A perché devono essere simmetrici, tipo se muovi il punto A più in su... il punto C si muove più in basso ...perché devono esserci... lo stesso spazio... tra i due punti.

Mentre parla M. ha i gomiti puntati sul banco e muove le mani davanti a sé, porta la mano sinistra in alto ad indicare il punto A che si muove più in su e dirige lo sguardo verso la mano sinistra; poi sposta la mano destra in basso per indicare che, in tal caso, il punto C si muove più in basso e dirige lo sguardo verso la mano destra. Infine, con un veloce movimento coordinato delle due mani simula, utilizzando pollice e indice e tenendo piegate le altre dita, due segmenti di uguale lunghezza.

L’analisi fatta nella prospettiva teorica della DD porta a fare le seguenti considerazioni. Il piano immaginario su cui si muovono gli oggetti della rappresentazione di M. è quello verticale così come il monitor del computer utilizzato per svolgere la consegna o della LIM che le è di fronte durante la discussione. I gesti con i quali M. accompagna le espressioni verbali da un lato rimandano alle azioni compiute con l’artefatto per risolvere il compito (sposta A... in questo caso “più in su”) dall’altro sono connessi, attraverso il feedback ricevuto dall’artefatto (il punto C si muove... in questo caso “più in basso”), alla interpretazione in termini di conservazione della distanza, espressa da M. più avanti, mediante il segno verbale pivot “stesso spazio”, accompagnato dal gesto descritto.

Dal punto di vista della DG, sarebbe interessante anche comprendere la diversità con cui i bambini simulano con il corpo le due attività (manipolativa e digitale). Da una prima analisi sembra che nelle attività manipolative con foglio e spillo gli studenti simulino le loro azioni (pizzicano il foglio, usano le due dita incrociate per fare la piega...), mentre con l’artefatto digitale simulino il comportamento della retta e del punto e si immedesimino negli oggetti astratti (muovono il braccio come fosse la retta, muovono le dita contemporaneamente per simulare la posizione dei due punti). È come se nell’artefatto manipolativo pensassero a sé stessi che operano, e nell’artefatto digitale si immedesimassero in rette e punti e fossero loro a muoversi e in questo senso incorporassero la simmetria.

In questo secondo esempio, l’analisi iniziale fatta dalle due prospettive partiva da focalizzazioni diverse, ma nel confronto si è colto come le due analisi potessero coniugarsi e arrivare a una conclusione comune, ovvero alla differenza con cui si simulano con i gesti le attività manipolative e digitali e, di qui, alla possibile sinergia tra i due artefatti. L’ipotesi che la simulazione di un artefatto manipolativo sia differente da quella di un artefatto digitale, pur validata in molte situazioni della presente sperimentazione, va comunque verificata in un numero più ampio e significativo di casi. In questo caso la conclusione condivisa deriva da un percorso differente, lo studio della mediazione semiotica, per gli uni, dell’analisi delle tecnologie digitali, per gli altri, ma porta a una conclusione condivisa.



## Conclusion

La riflessione sull'attività di ricerca condivisa ha permesso, alla fine e anche grazie al supporto di altri ricercatori delle due aree che pur non avendo partecipato all'interazione hanno commentato e discusso con uno sguardo esterno l'attività svolta, di arrivare a una maggiore consapevolezza di cosa significhi co-disciplinarietà e quali processi la facilitino.

Gli elementi che la supportano sono da un lato un'esplicitazione dei rispettivi framework e il rifiuto di facili analogie tra le rispettive teorie, dall'altro la necessità di partire da un boundary object, da un segno artefatto o pivot su cui focalizzare l'attenzione che possa avere uguale interesse per le due aree: l'osservazione dell'attività didattica situata, anche mediata attraverso video o audio registrazione.

Sintetizziamo ora gli elementi che alla fine del processo sono sembrati maggiormente significativi per cogliere parallelismi o differenze sinergiche. Per differenze sinergiche intendiamo letture diverse delle stesse attività che però concorrono alla descrizione del fenomeno complesso.

1. la mediazione: mediazione didattica e semiotica sono due teorie autonome che in comune hanno solo il nome. La mediazione semiotica è più attenta allo studio dei segni e alla coerenza esterna tra segni e sapere disciplinare, la mediazione didattica è attenta alla traiettorie personale e professionale e alla coesione interna (epistemologica, valoriale e relazionale) nella classe.
2. il ritmo della mediazione: il percorso di mediazione (semiotica e didattica) si sviluppa con ritmi ricorsivi e ridondanti in cui si passa successivamente e più volte dal segno artefatto al segno matematico, dall'esperienza alla concettualizzazione, dall'immersione al distanziamento.
3. il corpo che apprende: l'attenzione non solo al linguaggio verbale ma anche al linguaggio del corpo era già nelle corde dei due gruppi di ricerca. La sperimentazione ha permesso di approfondire come il corpo partecipi ai processi di apprendimento ovvero come i gesti non siano solo strumenti di comunicazione, ma anche anticipino/accompagnino i processi di concettualizzazione e, nella classe, permettano di condividere significati.
4. la sinergia tra artefatti manipolativi e digitali: l'analisi dei gesti ha permesso di comprendere le modalità con cui il lavoro con gli artefatti differenti favorisce processi di apprendimento.
5. il ruolo della classe: la prima fase della sperimentazione è stata effettuata con piccoli gruppi (2/4) di studenti, la seconda con la classe intera. La possibilità di svolgere le due sperimentazioni ha permesso di arrivare alla condivisione di cosa permanga e cosa cambi al variare del contesto di apprendimento.

Vi è comunque un punto fermo alla fine del processo: DD e DG non si occupano di aspetti differenti dell'azione didattica, ma si occupano entrambe sia degli apprendimenti disciplinari, delle competenze trasversali e degli aspetti relazionali. Entrambe si occupano, anche se con prospettive diverse, dell'azione didattica come fatto olistico.

Se fino ad ora le due discipline sono vissute in compartimenti stagni e hanno avuto minime interazioni riteniamo che per la qualità della formazione degli insegnanti, sia iniziale sia in servizio, e per il buon funzionamento del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria, sia sempre più necessario trovare spazi co-gestiti per costruire seminari e laboratori in cui si analizzino, progettino e regolino



azioni didattiche osservate con un'analisi plurale, ovvero in cui le differenti prospettive collaborino nelle attività con gli studenti.

## Bibliografia

- Altet M. (2013). L'apporto dell'analisi plurale dalle pratiche didattiche alla co-formazione. In PC Rivoltella, PG Rossi (eds.) *L'agire didattico*. La scuola. Brescia.
- Ardoino J. (1990). L'analyse multiréférentielle des situations sociales. *Psychologie clinique*, 3.
- Ardoino J. (1992). L'approche multiréférentielle (plurielle) des situations éducatives et formatives dans l'approche multiréférentielle en formation et en sciences de l'éducation. *Pratiques de formation. Analyses*, 25-26.
- Ardoino J. (1996). Le travail sur les langages disciplinaires \w l'agent, l'acteur, l'auteur. Ouvrage collectif, Éthique, épistémologie et sciences de l'homme. L'Harmattan. Paris.
- Arzarello F, Paola D., Robutti O., Sabena C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*. Springer. 70, 97-109
- Barbier R. (1994). *Les sciences de l'éducation au carrefour du XXIe siècle*. Université Paris 8. Paris.
- Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (2008). *Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective*, in L. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, (second edition), Routledge, 746-783
- Bartolini Bussi M. G. e Mariotti M. A. (2009), Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, Vol. 32 A-B, 270-294
- Blanchard-Laville C. (2000). De la co-disciplinarité en sciences de l'éducation. *Revue française de pédagogie*. 132, pp. 55-66.
- Blanchard-Laville C., Chaussecourte P., Roditi E. (2007). Recherche codisciplinaire sur les pratiques enseignantes: quels modes de coopération avec les praticiens observés? *Education et francophonie, Association canadienne d'éducation de langue française*. 35, 2, pp.55-81.
- Borghi, A.M. Binkofski, F. (2014). *Words As social Tools: An embodied view on abstract concepts*. SpringerBriefs in Cognition series. Springer: New York
- Caruana, F., & Borghi, A. (2016) *Il cervello in azione*. Bologna. Il Mulino.
- Chevallard Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Damiano E. (2013). *La mediazione didattica*. Franco Angeli. Milano.
- Develay M. (1993). *A propos de transposition didactique en sciences biologiques*. In M. Develay, J.P. Astolfi. *La didactique des sciences*, PUF, Paris, pp. 119-138;
- Duit R., Gropengießer H., Kattmann U., Komorek M., Parchmann I. (2012). The Model of Educational Reconstruction. A Framework for Improving Teaching and Learning Science. In D. Jorde e J. Dillon (Eds.) *Science Education Research and Practice in Europe Retrospective and Prospective*. Sense Publishers. Rotterdam.
- Faggiano, E., Montone, M., Mariotti, M.A. (2016). *Creating a synergy between manipulatives and virtual artefacts to conceptualize axial symmetry at primary school*, In Proceedings of PME 40, Vol 2. 235-242
- Foucault M. (1975). *Surveiller et punir. Naissance de la prison*. Gallimard- Paris.
- Goldman R., Pea R., Barron B., Derry S. (2008). *Videoricerca nei contesti di apprendimento*. Raffaello Cortina Editore. Milano.
- Houssaye J. (1988). *Le triangle pédagogique*. Peter Lang. Berne.
- Laurillard D (2014). *L'insegnamento come scienza della progettazione*. Franco Angeli, Milano.
- Marton, F, Tsui, A.B.M. (2004) *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.



- Montone A., Faggiano E., Mariotti M.A. (2017). *The design of a teaching sequence on axial symmetry, involving a duo of artefacts and exploiting the synergy resulting from alternate use of these artefacts*, Proceedings of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education, Dublin, Ireland.
- Plaisance E., Vergnaud G. (2001) *Les sciences de l'éducation*. Collection Repères. Ed La Découverte, 3ème édition, Paris.
- Rézeau J. (2004). *Médiatisation et médiation pédagogique dans un environnement multimédia*. (testo della tesi di dottorato riprodotto in <http://joseph.rezeau.pagesperso-orange.fr>).
- Rossi PG (2016). Alignment. *Education Sciences and Society*. 2016, 2. pp. 33-50.
- Terrisse B. (1997). - Monodisciplinarité et interdisciplinarité dans l'enseignement et la recherche à l'Université du Québec à Montréal, Communication présentée au Colloque L'interdisciplinarité, à la frontière de l'université et de la cité, à l'université de Neuchâtel en septembre 1997.
- Sherin M.G., van Es E.A. (2009). Effects of Video Club Participation on Teachers' Professional Vision. *Journal of Teacher Education*. 60. 20-37.
- Santagata R., e Guarino J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*. 43, 1, 133-145.
- Seidel T., Stürmer K. (2014). Modeling and measuring the structure of professional vision in pre-service teachers. *American Educational Research Journal*. 51, 4, 739-771.
- Vygotskij, L.S. (1980) *Il processo cognitivo*, Torino, Boringhieri.
- Vinatier I., Altet M. (2008). *Analyser et comprendre le pratique enseignante*. PUR. Paris.
- Widlöcher D (1998) *L'interprétation des dessins d'enfants*. Editions Mardaga.



