

Un metodo didattico per sviluppare competenze nel calcolo mentale di addizioni e sottrazioni a più cifre in studenti con difficoltà o con disturbo di apprendimento

A teaching method to develop skills in mental calculation of multi-digit additions and subtractions in students with difficulties or learning disorder

Giampaolo Chiappini / Istituto per le Tecnologie Didattiche di Genova / chiappini@itd.cnr.it

Giacomo Cozzani / Istituto per le Tecnologie Didattiche di Genova / cozzani@itd.cnr.it

Luca Bernava / Istituto per le Tecnologie Didattiche di Genova / bernava@itd.cnr.it

Cristina Potente / Centro Leonardo di Genova / c.potente@centroleonardo.net

Shaula Verna / Centro Leonardo di Genova / shaula.verna@gmail.com

Fabrizio De Carli / Istituto di Bioimmagini e Fisiologia Molecolare di Milano / fabrizio@dism.unige.it

The article presents the results of a controlled experiment designed to evaluate a teaching method aimed at developing mental calculation competencies in students with learning difficulties or disorder. The method exploits touch-screen technology to give students the means to have an Immersive Learning Experience of the strategies that experts use in mental calculation. The strategies that may be involved in mental calculation of multi-digit addition and subtraction are presented along with the ways in which these strategies are incorporated into the application used in the experiment. Ten students with learning difficulties or disorder were involved in the experiment and underwent three-months training by touch-screen application following a standardized protocol. Their performance was evaluated by a standardized test performed at the beginning and at the end of the experiment, by two questionnaires and by a final test of acquired mathematical skills. Statistical analysis showed a significant increase of the mean score at the standard addition/ subtraction test and most students, following the training, achieved a score in the normal range. The present findings indicate an effective and reproducible approach for the development of an inclusive teaching practice of mental calculation within the school context.

Key-words: mental calculation, immersive learning experience, gimmerfive, low attaining students, dyscalculia

abstract

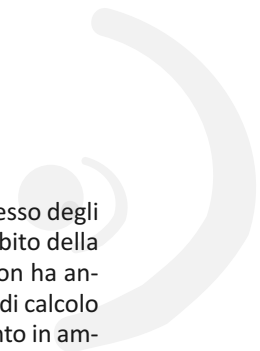
© Pensa MultiMedia Editore srl
ISSN 2282-5061 (in press)
ISSN 2282-6041 (on line)

1. Introduzione

Il calcolo mentale presenta caratteristiche di esecuzione che lo rendono profondamente diverso dal calcolo scritto. Una persona esperta per svolgere un calcolo mentale generalmente: i) opera sul valore complessivo del numero piuttosto che sulle singole cifre di ogni numero coinvolto nel calcolo¹; ii) seppur in modo implicito, mobilita principi matematici importanti, come le proprietà delle operazioni, con i quali elabora strategie per esprimere le quantità numeriche in gioco in termini di relazioni tra altri numeri e semplificare il calcolo; iii) determina mentalmente l'intero processo di calcolo in modo creativo e flessibile, tenendo conto di specifiche caratteristiche che consentono di scomporre i numeri coinvolti nel problema in elementi facilmente manipolabili².

Queste caratteristiche rendono il calcolo mentale profondamente diverso dal calcolo scritto centrato, invece, sull'esecuzione degli algoritmi caratteristici delle operazioni aritmetiche. Notiamo che, per eseguire gli algoritmi delle operazioni scritte non è necessario capire cosa rappresentano le cifre su cui si opera, o i principi su cui si basa l'algoritmo di calcolo che si sta effettuando, e non è neppure necessario possedere una chiara idea della struttura dei numeri e delle relazioni che intercorrono tra di essi. È necessario solo saper eseguire rigorosamente la procedura algoritmica appresa. L'intelligenza numerica, che è la capacità di capire e rappresentarsi il mondo in termini di numeri e quantità, ha molto a che vedere con il calcolo mentale e molto poco con il calcolo scritto (Lucangeli, Ianniti & Vettore, 2007). La capacità nel calcolo mentale è una competenza importante per l'autonomia di vita delle persone ed è cruciale per lo sviluppo di capacità nella soluzione di problemi aritmetici. Infatti, l'abilità di decomporre e comporre numeri per affrontare un problema di calcolo mentale fornisce euristiche per la costruzione di strategie risolutive di problemi complessi. In generale, le competenze degli studenti nel calcolo mentale sono piuttosto carenti e, in particolare, gli studenti a basso rendimento in ambito aritmetico³ (low attaining students), incontrano grosse difficoltà nello sviluppo di queste competenze (Fuchs L.S., Fuchs D. & Prentice, 2004; Hanich, Giordania, Kaplan, & Dick, 2001). Le cause dei modesti risultati nello sviluppo di queste competenze sono dovute principalmente al curriculum e alla tradizione scolastica, che sono centrati principalmente sull'insegnamento delle procedure del calcolo scritto, all'inadeguatezza dei metodi didattici impiegati nel sostenere gli studenti nello sviluppo delle strategie del calcolo mentale, oltre che alle caratteristiche di funzionamento cognitivo degli studenti.

- 1 Per esempio, dovendo calcolare il risultato di $34+23$ aggiunge al valore 34 prima 20 e poi 3, invece di operare con le cifre delle unità e delle decine dei due numeri come nel calcolo scritto.
- 2 Per esempio, dovendo calcolare il risultato di $34+98$ usa una strategia diversa rispetto al calcolo di $34+23$, cioè aggiunge 100 al valore 34 e quindi toglie 2.
- 3 Gli studenti a basso funzionamento in aritmetica (low attaining students in arithmetic) sono un gruppo di studenti eterogeneo con QI nella norma che mostrano resistenza ad apprendere l'aritmetica secondo i tradizionali metodi di insegnamento e che nei test standardizzati tipicamente producono risultati che si collocano nella fascia medio bassa (compreso tra -1ds e -2ds) o al di sotto di essa (minore di -2ds).



Il valore formativo del calcolo mentale e la sua importanza nel successo degli studenti in ambito matematico sono oggi largamente condivisi nell'ambito della ricerca didattica (Varol & Farran, 2007). Tuttavia, la ricerca didattica non ha ancora definito un metodo efficace e condiviso per sviluppare le strategie di calcolo mentale con tutti i bambini, e in particolare con quelli a basso rendimento in ambito aritmetico.

2. Obiettivo della Ricerca

In una revisione della letteratura sul calcolo mentale di addizioni e sottrazioni e sul modo di svilupparlo negli alunni, Varol e Farran (2007) hanno evidenziato che una questione cruciale, oggi al centro del dibattito, è se agli studenti debba essere data la possibilità di scoprire le strategie di calcolo mentale, sfruttando le loro conoscenze e abilità naturali (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema, & Empson, 1998; Heirdsfield, 2000; Kamii, Lewis, & Livingston, 1993) o se, invece, sia più opportuno insegnare queste strategie e consentire loro di usare quelle in cui si sentono più sicuri (Beishuizen, 1993; Reys, 1984).

In questo lavoro presentiamo i risultati di una sperimentazione che abbiamo effettuato per valutare un metodo didattico volto a sviluppare competenze nel calcolo mentale di addizioni e sottrazioni a più cifre. Questo metodo in qualche misura integra i due approcci centrati rispettivamente sulla scoperta e sull'insegnamento di strategie di calcolo e, allo stesso tempo, è diverso da entrambi.

Si tratta di un metodo da noi elaborato che si avvale della tecnologia per creare le condizioni affinché gli studenti possano compiere un'*Esperienza Didattica Immersiva* delle strategie che le persone esperte sono solite usare nel calcolo mentale di addizioni e sottrazioni a più cifre.

L'espressione "esperienza didattica immersiva" è qui usata per indicare l'esperienza che si realizza in un ambiente strutturato sulla base di stimoli cognitivi e percettivi (affordance⁴) che emergono operando in esso e consentono allo studente di:

- Riconoscere, nella scansione degli eventi che emergono nell'interazione con l'ambiente, l'attualizzazione concreta di strategie di calcolo che possono essere proficuamente impiegate per risolvere addizioni e sottrazioni a più cifre mediante una computazione di tipo mentale;
- attribuire a tali strategie il significato e l'utilità che lo sviluppo culturale e la pratica sociale hanno assegnato ad esse;

4 Il concetto di affordance è stato introdotto da Gibson nell'ambito della psicologia della percezione per denotare la relazione tra un organismo e il suo ambiente (Gibson, 1979) ed è stato successivamente adottato da Norman nel campo di studi della Human Computer Interaction (1988) per indicare le fondamentali proprietà degli artefatti che determinano come possono essere usati. In quest'ultimo campo di studi la nozione di affordance ha avuto negli anni una forte evoluzione per tenere conto delle trasformazioni delle interfacce dovute al progresso tecnologico, sino alle attuali interfacce immersive (Dede, 2009) che costituiscono un riferimento per il metodo didattico da noi elaborato.

- imparare ad usare tali strategie risolvendo un numero di compiti molto maggiore di quanto lo studente affronterebbe nella normale pratica didattica;
- interiorizzare tali strategie in tempi brevi.

Chiaramente, affinché tutti gli studenti possano sviluppare questo tipo di esperienza occorre che essi siano adeguatamente sostenuti nel pianificare la loro strategia di calcolo e siano fortemente coinvolti in questo tipo di attività.

La nostra ricerca ci ha permesso di verificare che oggi è possibile far compiere agli alunni questo tipo di esperienza, grazie all'uso della tecnologia dei tablet. Infatti, negli ultimi due anni, attraverso un progetto della regione Liguria, è stata sviluppata una applicazione funzionante su iPad dal nome GimmeFive per gli scopi sopra indicati. Questo lavoro ha come obiettivo la presentazione dei risultati di una sperimentazione che è stata effettuata per valutare questo metodo didattico e l'illustrazione del ruolo cruciale svolto dalla tecnologia nel rendere possibile il suo impiego anche con bambini a basso rendimento in ambito aritmetico.

3. Strategie coinvolte nel calcolo mentale di addizioni e sottrazioni a più cifre

Le strategie di più basso livello usate dai bambini nel loro approccio al calcolo mentale di addizioni e sottrazioni sono basate sulla conta. All'inizio, i bambini implementano queste strategie supportando il processo di conta attraverso l'uso delle dita. Carpenter e Moser (1984) hanno mostrato che queste strategie possono essere di tipo *counting-all* (per esempio, per calcolare $3+5$ il bambino parte da 1 ed enumera in sequenza i due addendi sino ad arrivare a 8, aiutandosi con le dita) oppure di tipo *counting-on* (il bambino parte dal valore cardinale di uno degli addendi, per esempio 5, e conta in avanti per il valore dell'altro addendo sino ad arrivare a 8, eventualmente aiutandosi con le dita).

Inoltre, Carpenter e Moser hanno evidenziato che le strategie non basate sulla conta sono le strategie *known fact* e le strategie *derived fact*. Le prime sono centrate sul richiamo del risultato del calcolo dalla propria memoria, in quanto fatto aritmetico conosciuto e memorizzato verbalmente nella memoria a lungo termine ($5+3$ fa 8!), le seconde sono basate su un processo di decomposizione di uno o di entrambi gli addendi per poter derivare il risultato da fatti aritmetici conosciuti ($13+5=18$ perché 13 è $10+3$ e $3+5$ fa 8, quindi $10+8$ fa 18).

Le strategie *derived fact* evolvono con l'esperienza e con l'esecuzione di calcoli mentali via via più complessi. La ricerca ha evidenziato che nel calcolo mentale di addizioni e sottrazioni a più cifre possono essere mobilitati tre tipi di strategie *derived fact* e più precisamente strategie di *decomposizione*, strategie *sequenziali*, strategie di *compensazione* (e.g., Beishuizen, 1993; Blöte, Klein, & Beishuizen, 2000; Reys, Reys, Nohda, & Emori, 1995; Lucangeli, Tressoldi, Bendotti, Bonanomi, & Siegel, 2003).

Le strategie di decomposizione sono strategie in cui i due numeri coinvolti nel calcolo sono visti principalmente come oggetti dotati di una struttura decimale, quindi decomposti in base a tale struttura (i.e., in centinaia, decine e unità)

con il fine di sommare o sottrarre separatamente le varie parti della struttura per poi ricomporre nel risultato i calcoli parziali effettuati. Questa strategia, conosciuta in letteratura anche come strategia *1010*, può essere esemplificata nel modo seguente:

$$34+27=; 30+20=50; 4+7=11; 50+11=61$$
$$64-39=; 60-30=30; 4-9=-5; 30+(-5)=25$$

Esiste una variante di questa strategia, conosciuta in letteratura come strategia *10s* che crea minori problemi nella soluzione di sottrazioni. Questa strategia presenta le caratteristiche riportate nei seguenti esempi:

$$34+27=; 30+20=50; 50+4=54; 54+7=61 \text{ oppure } 54+6+1=61$$
$$64-39=; 60-30=30; 30+4=34; 34-9=25 \text{ oppure } 34-4-5=25$$

Le strategie sequenziali, invece, sono strategie nelle quali solo il secondo numero viene decomposto nella struttura decimale (i.e. centinaia, decine, unità) per far sì che queste parti possano essere sequenzialmente sommate o sottratte al primo numero.

Questa strategia, conosciuta in letteratura anche come strategia *N10*, può essere esemplificata nel modo seguente:

$$34+27=; 34+20=54; 54+7=61 \text{ oppure } 54+6+1=61$$
$$64-39=; 64-30=34; 34-9=25 \text{ oppure } 34-4-5=25$$

Infine, le strategie di compensazione sono strategie in cui i due numeri coinvolti nel calcolo sono visti come oggetti che possono essere strutturati in modi diversi, sfruttando specifiche proprietà aritmetiche, con il fine di giungere ad una forma rappresentativa del calcolo che renda la sua esecuzione molto più facile da essere eseguita mentalmente.

$$34+27=; 34+30=64; 64-3=61 \quad \text{oppure} \quad 34+27=; 31+30=61$$
$$64-39=; 64-40=24; 24+1=25 \quad \text{oppure} \quad 64-39=; 65-40=25$$

Le strategie descritte sono giustificate dalle proprietà delle operazioni ma il soggetto che le pratica può non essere consapevole di ciò. Esse possono essere eseguite a diversi livelli di interiorizzazione e generalizzazione. Per esempio, ad un livello inferiore lo studente può essere in grado di mobilitare tali strategie avvalendosi dell'aiuto di specifiche rappresentazioni esterne, come la linea dei numeri o le rappresentazioni disponibili con un software interattivo come GimmeFive. Ad un livello superiore può essere in grado di realizzarle in modo puramente mentale, sapendo anche esplicitare i passaggi compiuti (Verschaffel et al., 2007).

Queste strategie non vengono normalmente usate spontaneamente dagli studenti con basso rendimento in ambito aritmetico (Denvir & Brown, 1986; Gervasoni, Hadden & Turkenburg, 2007). Questi studenti tendono ad usare la strategia in cui si sentono più sicuri, e questa generalmente coincide con la strategia basata sulla conta (spesso supportata dall'uso delle dita) o sull'esecuzione mentale dell'algoritmo dell'operazione scritta (Wright, Ellemor-Collins, & Lewis, 2007).

4. Le funzionalità di GimmeFive

GimmeFive⁵ è una applicazione funzionante su iPad che è stata sviluppata per coinvolgere tutti gli studenti in attività volte a sviluppare, da una parte, la padronanza delle relazioni additive dei numeri entro il 10, il 100 e il 1000 e, dall'altra, la capacità di sfruttare queste relazioni per decomporre e ricomporre in modo intelligente i numeri coinvolti nel calcolo mentale di addizioni e sottrazioni utilizzando le strategie descritte nella sezione precedente.

GimmeFive si compone di 8 ambienti. I primi 5 ambienti supportano lo sviluppo delle competenze che costituiscono un prerequisito per lo sviluppo del calcolo mentale di addizioni e sottrazione a più cifre e più in particolare la capacità di:

- Gestire le relazioni additive tra numeri con risultato minore o uguale a 10;
- Decomporre numeri entro il 10 usando come base della decomposizione il numero 5 per determinare il risultato di addizioni entro il 20;
- Gestire relazioni additive tra decine, tra centinaia, ...

Gli ultimi tre ambienti sono volti a supportare lo sviluppo di strategie sequenziali, di decomposizione e di compensazione che possono essere coinvolte nel calcolo mentale di addizioni e sottrazioni. Una descrizione dettagliata degli ambienti di cui l' applicazione si compone è riportata al seguente indirizzo: <http://www.alnuset.com/it/gimfive>. Questi ambienti sono stati progettati per consentire agli studenti di usare i gesti tipici della tecnologia dei tablet (touch e drag) per attualizzare concretamente le strategie usate dagli esperti nel calcolo mentale di addizioni e sottrazioni a più cifre e metterli nelle condizioni di poter fare esperienza di queste strategie, risolvendo una quantità di compiti molto maggiore di quanto essi realizzerebbero nella praticata didattica ordinaria.

Analizziamo ora attraverso un esempio come gli ultimi tre ambienti di GimmeFive possano creare le condizioni per consentire allo studente di fare un'esperienza immersiva delle strategie sequenziali, di decomposizione e di compensazione usate dagli esperti nel calcolo mentale di addizioni e sottrazioni.

La prima immagine della Fig.1 mostra come il compito appare sul display di GimmeFive.

Il touch sul primo e poi sul secondo addendo del compito produce il risultato riportato nella seconda immagine. La decomposizione in parti dei due addendi, tipica della strategia 1010 prodotta mentalmente da un esperto, è incorporata nel gesto del touch che l'alunno può inizialmente attivare attraverso un approccio esplorativo oppure in modo guidato dal tutor.

5 GimmeFive è stata realizzata dall'Istituto per le Tecnologie Didattiche del CNR in collaborazione con la società DiDiMa srl nell'ambito di un progetto finanziato da Fondo Sociale Europeo Regione Liguria 2007-2013 Asse IV.

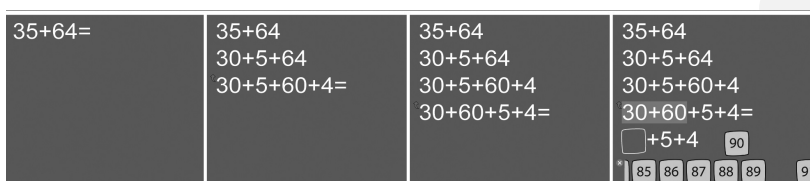


Fig. 1: Esempio di esperienza di calcolo mentale con GimmeFive

Effettuata la decomposizione, il drag applicato sul numero 60 produce l'effetto riportato nella terza immagine. Questo processo reifica quanto la persona esperta compie mentalmente dopo la decomposizione dei due addendi: sommare separatamente le varie parti della struttura, per poi riassarle nel risultato. Per comprendere come si esegua la somma delle parti consideriamo la quarta immagine: il touch sul primo operando del quarto passaggio determina la selezione del calcolo da compiere e predisporre l'interfaccia per poterlo eseguire. Mediante una barra a scorrimento dei numeri lo studente può selezionare il risultato del calcolo (il numero 90 nell'immagine) e trascinarlo nella cella preposta ad accoglierlo. Questa procedura viene applicata sia per svolgere i vari calcoli parziali che per trovare il risultato finale del calcolo. Quanto descritto fa riferimento alla strategia di decomposizione 1010. Osserviamo, però, che tutte le strategie di calcolo mentale di addizione e sottrazione a più cifre descritte nella precedente sezione possono essere reificate nel funzionamento dell'applicazione e possono quindi essere concretamente attualizzate nello svolgimento di questi calcoli.

5. Contesto della sperimentazione

L'applicazione è stata sperimentata in un contesto controllato con due gruppi di studenti a basso rendimento in ambito aritmetico e, più in particolare, con un gruppo di 4 studenti con difficoltà di apprendimento in aritmetica e con un gruppo di 6 studenti con discalculia. Gli studenti, di età compresa tra 8 anni e 10 mesi e 11 anni e 11 mesi frequentavano le ultime due classi della scuola primaria e le prime due classi della scuola media (dettagli in Tabella 1). Entrambi i gruppi di studenti erano seguiti presso il Centro Leonardo di Genova che è stato coinvolto nella sperimentazione. L'attestazione di difficoltà di apprendimento e la diagnosi di discalculia sono state compiute presso questo centro dopo aver sottoposto i bambini a prove standardizzate che forniscono parametri per valutare la correttezza e la rapidità nel calcolo mediante la Batteria per la Discalculia Evolutiva – BDE (Biancardi, Morioni & Pieretti, 2004) e dopo aver verificato, con training specifico, una resistenza al trattamento da parte del gruppo di bambini a cui è stata di conseguenza riconosciuta la discalculia.

Nome	Età	Classe Freq.	Gruppo
F.R.	9 anni e 9 mesi	5 elementare	Discalculia
C.B	11 anni e 1 mese	1 media	Discalculia
C.G	10 anni e 3 mesi	5 elementare	Diff. Appr.
B.F.	11 anni e 1 mese	1 media	Diff. Appr.
C.L.	11 anni e 7 mesi	1 media	Discalculia
C.M	11 anni e 7 mesi	2 media	Discalculia
C.E	11 anni e 11 mesi	2 media	Discalculia
R.T.	11 anni e 9 mesi	4 elementare	Diff. Appr.
D.R	8 anni e 10 mesi	5 elementare	Discalculia
C.S	10 anni e 4 mesi	4 elementare	Diff. Appr.
F.R.	9 anni e 10 mesi	5 elementare	Discalculia

Tab. 1: Studenti coinvolti nella sperimentazione

La sperimentazione con questi due gruppi di studenti si è limitata allo sviluppo di strategie sequenziali e di decomposizione relative al calcolo mentale di addizioni e sottrazioni a due cifre e si è basata sul confronto tra le prestazioni dei due gruppi di studenti all'inizio e al termine della sperimentazione. Tutti gli studenti hanno iniziato l'attività a partire dal primo ambiente di GimmeFive e, in successione, hanno operato in tutti gli ambienti ad eccezione dell'ultimo. I tutor che hanno seguito gli studenti nella sperimentazione sono collaboratori del Centro Leonardo che hanno ricevuto una specifica formazione sulle tematiche al centro dell'indagine per poter gestire con sicurezza le attività.

La sperimentazione è stata condotta in base ad un protocollo condiviso tra ricercatori e tutor. Anche i genitori degli studenti sono stati coinvolti: si sono assunti l'impegno di monitorare i propri figli a casa durante lo svolgimento dei compiti assegnati loro dai tutor e di compilare giorno per giorno un resoconto dell'attività svolta. Il protocollo della sperimentazione prevedeva:

Un incontro settimanale tra tutor e studente della durata di circa 45 minuti. All'inizio di ogni incontro il Tutor verificava la prestazione dello studente relativa all'attività svolta nell'incontro precedente (prendendo nota degli errori commessi e del tempo impiegato nell'esecuzione di un set di 10 compiti). Quindi introduceva la nuova attività con GimmeFive fornendo il supporto indicato dal protocollo di gestione dell'attività. Al termine dell'incontro verificava la prestazione relativa alla sessione di lavoro corrente (prendendo nota degli errori commessi e del tempo impiegato nell'esecuzione di un set di 10 compiti). Il tutor, infine, assegnava allo studente i compiti da svolgere a casa;

Un'attività giornaliera che lo studente svolgeva a casa, della durata media di 10 minuti, monitorata dai genitori, che consisteva nello svolgimento di 2-3 sequenze di 10 esercizi con GimmeFive. I genitori dovevano ogni volta registrare in una griglia il numero di compiti svolti a casa dai loro figli e il tempo impiegato.

La sperimentazione è iniziata alla fine del mese di ottobre 2014 e si è protratta sino alla prima decade di febbraio 2015 (3 mesi e mezzo, comprensivi delle va-

canze di Natale) e ha contemplato 12 o 13 incontri tra bambini e tutor. Nel corso della sperimentazione le disposizioni del protocollo sono state eseguite con cura da parte di tutti i tutor e dalla maggioranza dei genitori (con due eccezioni).

6. Strumenti usati nella valutazione del metodo didattico

Prima di iniziare la sperimentazione tutti gli studenti sono stati sottoposti al test BDE per quanto riguarda i sottotest di calcolo mentale con risultato < 10 (BDE_1) e > 10 (BDE_2) riportati nelle seguenti in Tab. 2 e Tab. 3 che sono stati ritenuti adeguati al tipo di sperimentazione che volevamo compiere.

4+2:	5+3:	3+6:	7+2:	1+5:	2+3:
5-2:	7-5:	8-3:	9-1:	6-4:	3-2:

Tab. 2: Test BDE_1

8+5:	3+8:	6+7:	9+8:	4+9:	7+5:	13+14:	10+12:	27+14:	50+30:
12-5:	18-6:	11-3:	15-2:	16-8:	13-4:	30-6:	43-15:	52-19:	70-30:

Tab. 3 Test BDE_2

Al termine della sperimentazione tutti gli studenti sono stati nuovamente sottoposti agli stessi test. Inoltre, al termine della sperimentazione gli studenti sono stati sottoposti ad ulteriori due test, da noi elaborati, riportati nella seguente Tab. 4.

64+32:	48+36:	17+42:	24+58:	32+40:	67-23:	44-16:	76-31:	82-34:	56-20:
34+23:	38+26:	27+32:	34+48:	34+30:	56-32:	64-26:	46-21:	92-24:	86-30:

Tab. 4: Test su addizioni e sottrazioni a due cifre

Le 5 addizioni e 5 sottrazioni riportate nella prima riga della tabella 3 sono state proposte in modo orale, mentre quelle riportate nella seconda riga della tabella 3, di difficoltà analoga alle precedenti, sono state proposte anche in forma lineare scritta. Per ognuno di questi due test sono state registrate le risposte e il tempo di esecuzione sia delle addizioni che delle sottrazioni. La somministrazione del test in forma lineare scritta, di difficoltà analoga a quello presentato in forma orale, è stata ritenuta necessaria per verificare l'acquisizione o meno delle strategie in studenti che presentavano anche un deficit nella memoria di lavoro.

I dati dei test sono stati sottoposti ad una elaborazione di tipo statistico.

Sono stati confrontati i risultati al test BDE all'inizio ed al termine della sperimentazione tramite un'analisi di varianza per misure ripetute nella quale veniva considerato un fattore di variabilità tra soggetti, cioè la presenza di discalculia, e 2 fattori entro soggetti, cioè il tipo di operazione (risultato minore o maggiore di 10) e la fase della sperimentazione (inizio e fine).

I risultati dei test di Tab. 4 non consentivano una valutazione diretta dell'effetto della sperimentazione in quanto eseguiti solo nella fase finale e sono stati

esaminati con analisi multivariata della varianza per misure ripetute per valutare se, in presenza di operazioni relativamente complesse, si riscontrassero differenze sia nei punteggi che nei tempi di esecuzione relativamente al fattore tra soggetti (presenza della discalculia) e ai due fattori entro soggetti, cioè tipo di operazione (addizione/sottrazione) e forma di presentazione (scritta/orale).

Infine, tutti gli studenti sono stati sottoposti a due questionari, uno all'inizio e uno al termine della sperimentazione per acquisire, con il primo, informazioni sul loro rapporto con il calcolo maturato nell'esperienza pregressa, con il secondo, informazioni sulla loro percezione dell'esperienza di calcolo compiuta in questa sperimentazione.

La valutazione dei miglioramenti conseguiti dagli studenti attraverso l'applicazione del metodo didattico descritto in precedenza si basa su diversi elementi: l'analisi dei dati relativi ai test descritti, le rilevazioni effettuate dal tutor all'inizio e al termine di ogni sessione di lavoro con gli studenti, i dati forniti dai genitori, i dati raccolti con i due questionari.

7. Analisi dei dati della sperimentazione

7.1 Analisi dei dati dei test

All'inizio della sperimentazione tutti gli alunni mostravano risultati al di sotto dei valori medi di riferimento al test BDE: in particolare 8 alunni su 10 nel sottotest BDE_1 e 3 alunni su 10 nel sottotest BDE_2 conseguivano un punteggio sotto la soglia ottenuta sottraendo 2 deviazioni standard alla media (in accordo con le disposizioni del *Consensus Conference* del 2009). Al termine dell'esperimento gli alunni con punteggi sotto-soglia si riducevano a 3 per il test BDE_1 e a 2 per il test BDE_2.

L'analisi di varianza indicava un significativo incremento del punteggio al termine della sperimentazione ($F_{1,8}=16.99$, $p=0.0033$), una significativa differenza in base al tipo di operazione ($F_{1,8}=14.25$, $p=0.0054$), cioè un punteggio medio migliore nelle operazioni con numeri maggiori di 10 rispetto a quelle con numeri inferiori a 10, ed un'interazione tra questi due fattori ($F_{1,8}=19.37$, $p=0.0023$) indicativa di un progresso maggiore per le operazioni con risultato inferiore a 10. La presenza di discalculia si associava a punteggi lievemente più bassi ma la differenza non raggiungeva la significatività statistica ($F_{1,8}=4.76$, $p=0.061$) e non emergevano interazioni con gli altri fattori.

Per quanto riguarda i due test effettuati al termine della sperimentazione e riportati in Tab. 3, il numero di risposte corrette e i tempi di esecuzione dei due gruppi di studenti nel test di addizioni e sottrazioni sono riportati in Tab. 5 (presentazione solo orale) e in Tab. 6 (presentazione in forma lineare scritta⁶).

6 In queste due tabelle non abbiamo tenuto conto dei risultati di due studenti discalculici in quanto quest'ultimi, nell'ultima parte della sperimentazione centrata proprio sullo sviluppo delle strategie di calcolo mentale, non hanno più svolto il lavoro assegnato per casa secondo le indicazioni del protocollo della sperimentazione e la loro prestazione non può essere pertanto confrontata con quella degli altri studenti che, invece, hanno seguito pienamente tali indicazioni.

Tab. 5: Risultati test addizioni e sottrazioni presentate in modo solo orale

Discalculia si/no	Classe frequentata	Addizioni: Resp. Corrette (su 5)	Addizioni: Tempo impiegato	Sottrazioni: Resp. Corrette (su 5)	Sottrazioni: Tempo impiegato
No	5 elementare	3	1' 25"	3	2' 00"
No	1 media	4	3' 20"	4	2' 50"
No	4 elementare	3	2' 44"	5	1' 56"
No	4 elementare	3	0' 45"	2	2' 05"
Si	5 elementare	5	1' 43"	4	1' 30"
Si	1 media	4	1' 50"	3	1' 53"
Si	2 media	5	4' 36"	4	4' 34"
Si	2 media	5	2, 56"	4	2' 58"

Tab. 6: Risultati test addizioni e sottrazioni presentate anche in forma scritta lineare

Discalculia si/no	Classe frequentata	Addizioni: Resp. Corrette (su 5)	Addizioni: Tempo impiegato	Sottrazioni: Resp. Corrette (su 5)	Sottrazioni: Tempo impiegato
no	5 elementare	5	1' 26"	3	1' 27"
no	1 media	5	1' 25"	5	1' 40"
no	4 elementare	4	1' 55"	4	1' 02"
no	4 elementare	4	0' 52"	3	1' 18"
si	5 elementare	3	0' 58"	5	1' 00"
si	1 media	5	1' 08"	5	1' 19"
si	2 media	4	2' 06"	5	4' 08"
si	2 media	5	1' 46"	5	2' 29"

Nell'analisi multivariata della varianza applicata a questi due test è risultato significativo solamente il fattore associato alla modalità di somministrazione del test ($F_{2,8}=5.69$, $p=0.029$) per cui la presentazione scritta si è associata ad un aumento della correttezza delle risposte (anche se con alcune interessanti eccezioni, come vedremo successivamente,) e ad una diminuzione del tempo di esecuzione. La presenza di discalculia ed il tipo di operazione (addizione/sottrazione) non hanno evidenziato effetti significativi.

Il confronto dei dati delle tabelle 5 e 6 mette in evidenza anche altri aspetti interessanti e cioè che:

La prestazione degli studenti con discalculia nella soluzione di addizioni presentate in modo orale è un'ottima prestazione (un solo errore: $48+36=74$), migliore di quella dei soggetti con difficoltà di apprendimento e addirittura migliore di quella da loro realizzata nel test somministrato in forma anche lineare scritta. Nell'eseguire mentalmente addizioni a due cifre, la modalità della somministrazione non ha inciso sulla correttezza delle risposte fornite dagli studenti discalculici. La modalità di somministrazione, invece, ha inciso sul tempo di esecuzione delle strategie di calcolo mentale delle addizioni, in quanto la somministrazione solo orale ha aumentato il carico cognitivo coinvolto nella memorizzazione e nel recupero dei dati numerici di ciascun compito;

La prestazione degli studenti discalculici nella soluzione di sottrazioni è mi-

gliore con la somministrazione effettuata in forma lineare scritta in cui non si registra alcun errore. Nei compiti di sottrazione la modalità di somministrazione ha inciso sia sul tempo di esecuzione delle strategie di calcolo mentale delle sottrazioni, sia sul controllo della correttezza della strategia nei compiti più complicati. È importante notare che nel test somministrato in modo orale, tutti gli errori compiuti da questi studenti (tranne un caso) riguardano le due sottrazioni in cui il valore delle unità del sottraendo è maggiore di quello delle unità del minuendo (quindi nelle sottrazioni di maggiore difficoltà);

La prestazione degli studenti con difficoltà di apprendimento in aritmetica non è significativamente diversa da quella degli studenti con discalculia. I dati riportati nelle due tabelle mostrano che anche con questi alunni le modalità di somministrazione hanno inciso sia sul tempo di esecuzione delle strategie di calcolo mentale di addizioni e sottrazioni sia sulla correttezza delle risposte.

7.2 Analisi di un caso

Per comprendere il tipo di mediazione fornito dall'uso di GimmeFive nello sviluppo di competenze nel calcolo mentale, riportiamo di seguito la sintesi di un'analisi tratta dalle osservazioni e dai rilevamenti effettuati dai tutor sul comportamento di uno studente durante la sperimentazione.

Carlo frequenta la 5 classe della scuola primaria ed è stato diagnosticato discalcolico. All'inizio della sperimentazione Carlo era in grado di eseguire solo semplici calcoli appoggiandosi sull'uso delle dita. In precedenza Carlo aveva già partecipato ad un training che gli aveva permesso di familiarizzare con i numeri "amici del 10". Prima della sperimentazione Carlo fornisce 7 risposte esatte su 12 nel test BDE_1 e 18 risposte esatte su 20 nel test BDE_2. Lo studente partecipa alle attività della sperimentazione con grande impegno. Non ha difficoltà a svolgere le prime cinque attività volte alla costruzione dei prerequisiti che impara a realizzare molto velocemente. Infatti, i dati raccolti nel corso della sperimentazione indicano che Carlo impiega meno di un minuto per svolgere in modo corretto i 10 compiti di ciascuna delle prime quattro attività e circa 3 minuti per svolgere la quinta attività. Operando nel sesto ambiente di GimmeFive, tramite il touch sui numeri Carlo comincia a fare esperienza della possibilità di decomporre numeri e, mediante il drag, di spostarli per poterli accoppiare tra loro in modo diverso usando una strategia di complemento a 10 o una decomposizione su base 5. Nel quinto incontro il tutor fa operare Carlo con addizioni a due cifre e lo introduce all'uso della strategia 1010 che lo studente impara velocemente ad eseguire con l'aiuto di GimmeFive. Emergono difficoltà nella gestione di calcoli che comportano il passaggio della decina e Carlo è aiutato dal tutor a trovare una strategia mediata dall'applicazione per superarla. Nel sesto incontro il tutor introduce la strategia N10 affrontando addizioni a due cifre e le stesse vengono riprese anche nell'incontro successivo. Carlo impara ad usare la strategia N10 reificandola concretamente sul display attraverso il supporto fornito da GimmeFive. Nell'incontro successivo il tutor introduce compiti di addizioni a tre cifre. Risolvendo questo tipo di compiti emergono difficoltà nella memorizzazione di risultati parziali (quando lo studente cerca di ridurre i passaggi risolutivi con GimmeFive) e nella verbalizzazione corretta dei numeri, ed è aiutato dal tutor. A casa, durante la set-

timana Carlo si impegna molto e svolge ogni giorno almeno due set di 10 esercizi ciascuno. Nell'incontro successivo, durante la verifica iniziale si notano miglioramenti. L'attività con le addizioni prosegue sino al nono incontro quando, con il supporto di GimmeFive, vengono introdotte le strategie di soluzione di sottrazioni mediante la decomposizione del minuendo o del sottraendo o di entrambi. Grazie al supporto fornito da GimmeFive che consente di reificare sia la strategia 1010 che la strategia N10 della sottrazione, Carlo impara abbastanza velocemente entrambe le strategie. Dal nono incontro sino al termine della sperimentazione (dodicesimo incontro) Carlo continua a svolgere calcoli mentali di addizioni e sottrazioni a due cifre. In questa fase si nota un decremento costante nell'uso del supporto fornito da GimmeFive. Carlo non ha più bisogno di reificare la strategia per mezzo dell'applicazione, ma la realizza mentalmente e fornisce direttamente il risultato. Questo è il segno che le strategie sono state da lui interiorizzate. Al termine della sperimentazione, nel test BDE_1 Carlo risponde correttamente a 11 domande su 12 mentre nel BDE_2 risponde correttamente a 20 domande su 20. Nel test somministrato in modo orale Carlo fornisce, nelle addizioni, 5 risposte esatte su 5 in 1' e 43'' e, nelle sottrazioni, 4 risposte esatte su 5 in 1' e 30'' (sbaglia $82-34=52$). Nel test somministrato in forma lineare scritta Carlo fornisce, nelle addizioni, 3 risposte esatte su 5 in 58'' (sbaglia $34+23=11$, sicuramente come effetto di trascinamento del test precedente che era di sottrazione e $38+26=25$), nelle sottrazioni, 5 risposte esatte su 5 in 1'.

7.3 Analisi dei dati del questionario

Prima di effettuare la sperimentazione agli studenti sono state sottoposte una serie di domande volte ad acquisire informazioni sul loro rapporto con il calcolo. Le loro risposte evidenziavano che il livello di ansia alla richiesta di calcoli mentali era molto elevato e conseguentemente il senso di autoefficacia di fronte alla prestazione molto basso.

Al termine della sperimentazione agli studenti sono state proposte 7 domande volte ad acquisire informazioni relative alla loro percezione dell'esperienza compiuta nella sperimentazione.

Con la prima domanda si è chiesto ad ogni alunno di esprimere, mediante una scala di valori da 1 a 4 (1 Per nulla – 2 Poco – 3 Abbastanza - 4 Molto) se l'attività avesse cambiato il suo rapporto con la matematica. Tutti gli studenti hanno scelto il valore 3 (abbastanza).

Con la seconda domanda si è chiesto ad ogni alunno se operando con GimmeFive avesse imparato cose che prima non sapeva fare e di indicare quali. Tutti hanno risposto che avevano imparato ad usare strategie di calcolo mentale.

Con la terza domanda si è chiesto all'alunno di indicare con una scala da 1 a 4, quanto sia importante conoscere strategie per eseguire un calcolo mentale. La maggioranza ha risposto 4, cioè molto.

Con la quarta e la quinta domanda si è chiesto ad ogni alunno di indicare come eseguiva il calcolo mentale di addizioni e sottrazioni prima di effettuare questa sperimentazione e come lo esegue ora. Tutti gli alunni hanno affermato che prima della sperimentazione contavano con le dita, due alunni hanno precisato che non eseguivano alcun calcolo a mente, due studenti hanno fatto riferi-

mento all'incolonnamento mentale dei numeri usato nel calcolo scritto. Riguardo al loro comportamento attuale, tutti gli studenti hanno evidenziato di usare le strategie apprese operando con GimmeFive.

Con la sesta e settima domanda si è chiesto agli studenti di indicare con una scala da 1 a 4, quanto conoscere strategie per eseguire il calcolo li renda più sicuri (sesta domanda) e tolga loro ansia e paura (settima domanda). Nella sesta domanda la maggioranza degli studenti ha fornito come risposta il valore 4, nella settima il valore 3.

8. Discussione

Riteniamo che i risultati conseguiti dai due gruppi di studenti nei due test BDE evidenzino che:

- All'inizio della sperimentazione la maggioranza degli studenti non aveva ancora memorizzato fatti aritmetici elementari (8/10 alunni non superavano la soglia al test BDE_1). Il confronto tra i risultati nel test BDE_1 prima e dopo la sperimentazione mette in evidenza un netto miglioramento nella memorizzazione di fatti aritmetici elementari (con risultato <10) da parte degli studenti con discalculia e con difficoltà di apprendimento: degli 8 studenti sotto la soglia alla prova iniziale 5 la superano alla prova finale. Infatti gli studenti che prima della sperimentazione non riescono a rispondere alle domande nel tempo concesso per la risposta (2 secondi per ciascuna domanda), migliorano dopo la sperimentazione. Si noti che, in questo caso, il tempo molto breve concesso per la risposta ha impedito loro di attuare una strategia di conta;
- Il fatto che gli studenti all'inizio della sperimentazione abbiano dimostrato una migliore prestazione nel test BDE_2 rispetto al test BDE_1 non deve sorprendere. Notiamo che nel test BDE_2, sia per quanto riguarda le addizioni che le sottrazioni, sono presenti 6 domande su 10 che, nel tempo assegnato per rispondere (15 s), possono essere affrontate attraverso una strategia di conta (supportata dall'uso delle dita) e, in effetti, la maggioranza degli studenti ha utilizzato questa strategia per rispondere alle domande. In questo test l'analisi delle prestazioni degli studenti mostra che gli errori o le non risposte sono concentrate praticamente sulle 4 domande finali. Complessivamente, però, queste domande incidono poco sul risultato finale del BDE_2. Per questa ragione, il confronto tra i risultati nel test BDE_2 prima e dopo la sperimentazione mette in evidenza un miglioramento meno marcato nel calcolo mentale di addizioni e sottrazioni rispetto al test BDE_1;
- Coloro che al termine della sperimentazione sono ancora sotto la soglia di normalità nei due test sono due studenti che hanno svolto la sperimentazione non aderendo completamente alle disposizioni del protocollo. Si tratta di due studenti che hanno partecipato agli incontri settimanali con i tutor ma che non hanno più svolto a casa i compiti assegnati, soprattutto nell'ultima fase della sperimentazione centrata sullo sviluppo delle strategie. I risultati di questi due studenti sono stati successivamente esclusi dall'analisi dei dati relativi al test riportato in Tab. 4.

- I test BDE_1 e BDE_2 non permettono di valutare appieno i miglioramenti prodotti dal metodo usato nella sperimentazione nello sviluppo di strategie di calcolo mentale di addizioni e sottrazioni a più cifre. Per questo motivo, al termine della sperimentazione abbiamo sottoposto tutti gli studenti ai test riportati in Tab. 4.
- L'analisi multivariata della varianza applicata a questi due test mostra che il fattore della somministrazione del test in forma lineare scritta ha prodotto un significativo effetto positivo sulla correttezza delle risposte e una diminuzione del tempo di esecuzione rispetto alla somministrazione solo orale. Questi due risultati erano abbastanza prevedibili. Meno prevedibile era il tipo di prestazione che gli studenti avrebbero prodotto in questi due test che sono di difficoltà superiore a quella dei test BDE. Il computo delle risposte corrette nei due test e l'analisi degli errori compiuti dagli studenti mostra che:
- I due gruppi di studenti coinvolti nella sperimentazione hanno imparato a gestire strategie sequenziali e di decomposizione nel calcolo mentale di addizioni e sottrazioni: riteniamo infatti che l'applicazione di queste strategie fosse necessaria per eseguire correttamente i test nei tempi rilevati. L'acquisizione di questa competenza da parte di studenti con discalculia o difficoltà di apprendimento costituisce un risultato rilevante anche se, in alcuni casi, permangono alcune incertezze nell'esercitare un pieno controllo della strategia nei compiti che presentano maggiori difficoltà; Non vi è differenza significativa nella prestazione dei due gruppi di studenti. Questo significa che anche gli studenti con discalculia hanno imparato a gestire strategie sequenziali e di decomposizione per effettuare il calcolo mentale di addizioni e sottrazioni. All'inizio della sperimentazione non era assolutamente scontato che avremmo potuto ottenere i risultati emersi in questi test, soprattutto da parte degli studenti con discalculia. Colpisce il fatto che l'apprendimento delle strategie di calcolo mentale sia avvenuto in un arco di tempo piuttosto breve e che riguardi tutti gli studenti che hanno seguito con impegno costante la sperimentazione attenendosi alle indicazioni del protocollo.
- Le osservazioni e le verifiche compiute dai tutor durante gli incontri con gli studenti ci hanno permesso di comprendere meglio la mediazione fornita dal sistema GimmeFive sia nella costruzione dei prerequisiti per il calcolo mentale sia nello sviluppo di strategie sequenziali e di decomposizione coinvolte nella soluzione di addizioni e sottrazioni. Seguendo i vari studenti nel corso della sperimentazione abbiamo verificato che:
- I supporti di tipo visuale e le particolari caratteristiche dell'interazione disponibili nei primi 5 ambienti di GimmeFive hanno permesso lo sviluppo di una pratica didattica immersiva che ha consentito a tutti gli studenti di sviluppare in breve tempo (circa un mese o un mese e mezzo, a seconda degli studenti) la capacità di: gestire le relazioni additive tra numeri con risultato minore o uguale a 10; decomporre numeri entro il 10 usando come base della decomposizione il numero 5 per determinare il risultato di addizioni entro il 20; gestire relazioni additive tra decine e tra centinaia;
- Le particolari caratteristiche di visualizzazione e di interazione disponibili con il sesto e settimo ambiente di GimmeFive hanno consentito agli studenti di fare una concreta esperienza immersiva delle strategie di calcolo mentale che le persone esperte usano nella soluzione di addizioni e sottrazioni a più cifre.

La tecnologia dei tablet ha consentito di reificare queste strategie attraverso semplici gesti. Mediante il touch e il drag sui numeri che apparivano sul display gli studenti hanno potuto entrare in contatto con le strategie che gli esperti usano nel calcolo mentale e hanno potuto fare esperienza di esse mobilitando le proprie capacità di tipo visuale, spaziale e motorie, nonché le competenze apprese nella fase di costruzione dei prerequisiti.

Le risposte fornite dagli studenti al questionario mostrano che entrambi i gruppi di studenti coinvolti nella sperimentazione hanno modificato profondamente il loro comportamento nel calcolo mentale di addizioni e sottrazioni a più cifre. Le risposte di tutti gli studenti evidenziano che il processo attuato con la sperimentazione li ha resi più sicuri e meno soggetti a problemi sul piano emotivo. Sentire di possedere delle strategie e sperimentare di saper risolvere calcoli anche complessi ha influenzato positivamente la loro auto-stima e ha migliorato gli aspetti emotivo-relazionali connessi al calcolo .

La loro percezione dei cambiamenti intervenuti con la sperimentazione collima con quella dei tutor e dei genitori. Questi ultimi, al termine della sperimentazione, hanno espresso un giudizio positivo sull'esperienza compiuta perché hanno visto concretizzarsi modifiche sostanziali nel comportamento e nelle prestazioni dei ragazzi in questo tipo di attività.

Le indicazioni emerse da questo studio sono supportate da risultati statisticamente significativi. Il presente studio si è proposto di analizzare le differenze tra discalculia e difficoltà di apprendimento avendo classificato in fase preliminare gli studenti in base alla risposta al trattamento convenzionale ma in considerazione dei risultati ottenuti può essere interessante una valutazione più estesa dell'efficacia del metodo con la possibile inclusione di un gruppo di controllo di studenti con discalculia ed un percorso di apprendimento con strumenti tradizionali.

9. Conclusione

La sperimentazione ha confermato l'ipotesi alla base di questa ricerca e cioè che sia possibile sviluppare la capacità di usare strategie di calcolo mentale per risolvere mentalmente addizioni e sottrazioni a più cifre anche negli alunni che evidenziano un basso rendimento nel calcolo aritmetico. La sperimentazione ha mostrato che questo obiettivo può essere concretamente perseguito per mezzo di un ambiente come GimmeFive nel quale questi studenti, con la guida di un tutor esperto della materia, possano compiere un'ricca *esperienza didattica immersiva* di calcolo mentale volta a esplorare l'utilità e l'efficacia delle strategie sequenziali, di compensazione e di decomposizione usate dagli esperti in questo calcolo e possano apprendere tali strategie avvalendosi del supporto cognitivo fornito dall'ambiente in cui operano. Il metodo didattico usato in questa sperimentazione controllata può costituire un riferimento per migliorare la didattica relativa al calcolo mentale e renderla maggiormente inclusiva. Come evidenziato nell'introduzione di questo articolo, al calcolo mentale viene oggi assegnato un valore formativo molto importante, ma le pratiche didattiche relative al suo sviluppo nelle classi risultano ancora poco efficaci e incapaci di includere nelle attività gli studenti che presentano bisogni speciali.

Il nostro studio mostra che il metodo usato nella sperimentazione è in grado di incidere positivamente sull'apprendimento sia di studenti con difficoltà di apprendimento sia di studenti con discalculia. Questo costituisce una premessa importante che apre la strada allo studio di come questo metodo possa essere implementato nelle classi per consentire lo sviluppo di una pratica didattica inclusiva in questo campo.

Riferimenti bibliografici

- Beishuizen M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 294-323.
- Biancardi A., Morioni E., Pieretti E. (2004). *BDE – Batteria per la Discalculia Evolutiva*. Torino: Omega.
- Blöte A. W., Klein A. S., Beishuizen M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, 10, 221-247
- Carpenter T. P., Moser J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grade one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (3), 179-202.
- Carpenter T. P., Franke M. L., Jacobs V. R., Fennema E., Empson S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 3-20.
- Dede C. (2009). Immersive interfaces for engagement and learning. *Science*, 323(5910), 66-69.
- Denvir B., Brown M. (1986). Understanding of number concepts in low attaining 7-9 year olds: part II. The teaching studies. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 143-164.
- Fuchs L.S., Fuchs D., Prentice K. (2004). Responsiveness to mathematical problem-solving instruction: Comparing students at risk of mathematics disability with and without risk of reading disability. *Journal of Learning Disabilities*, 37, 293-306.
- Gervasoni A., Hadden T., Turkenburg K. (2007). Exploring the number knowledge of children to inform the development of a professional learning plan for teachers in the Ballarat diocese as a means of building community capacity. In J. Watson, K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice* (pp. 305-314). Hobart: MERGA.
- Gibson J. (1979). *The Ecological Approach to Visual Perception*. Boston: Houghton Mifflin.
- Hanich L.B., Jordan N.C., Kaplan D., Dick J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 93, 615-626.
- Kamii C., Lewis B. A., Livingston S. J. (1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures. *Arithmetic Teacher*, 41(4), 200-203.
- Lucangeli D., Iannitti A., Vettore M. (2007). *Lo sviluppo dell'intelligenza numerica*. Roma: Carocci.
- Lucangeli D., Tressoldi P. E., Bendotti M., Bonanomi M., Siegel L. S. (2003). Effective strategies for mental and written arithmetic calculation from the third to the fifth grade. *Educational Psychology*, 23(5), 507-520.
- Norman D. (1988). *The Psychology of Everyday Things*, New York: Basic Books.
- Reys R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, 84(5), 546-557.
- Reys R. E., Reys B. J., Nohda N., Emori H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(4), 304-326.
- Varol F., Farran D.C. (2007). Elementary school students' mental computation strategies. *Early Childhood Education Journal*, 35(1), 89-94.
- Verschaffel L., Torbeyns J., De Smedt B., Luwel K., Van Dooren W. (2007). Strategy flexibility in children with mathematical difficulties. *Educational and Child Psychology*, 24, 16-27
- Wright R. J., Ellemor-Collins D., Lewis G. (2007). Developing pedagogical tools for intervention: Approach, methodology, and an experimental framework. In J. Watson, K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Hobart (Vol. 2, pp. 843-852). Hobart: MERGA

